5. EQUAZIONI IRRAZIONALI

Vengon dette "**irrazionali**"
quelle equazioni nelle quali l'incognita compare almeno una volta sotto il segno di radice.

Ad esempio, sono equazioni irrazionali le seguenti:

$$\sqrt{2x+1}=x-7; \qquad \sqrt[5]{x}+x-2=0; \qquad \sqrt[3]{x-1}+1=\sqrt{x}$$

NOTA. Osserviamo che invece un'equazione come la $x^2-x\sqrt{2}-4=0$
NON rientra nella categoria delle "equazioni irrazionali":
è, semmai, una equazione *a COEFFICIENTI irrazionali*.

Quando si deve risolvere un'equazione irrazionale,
generalmente si procede eliminando i radicali sotto i quali compare l'incognita.
E tale obiettivo si raggiunge elevando, una o più volte,
entrambi i membri dell'equazione data, ad un'opportuna potenza.

C'è però una "**sorpresa**" che occorre prepararsi a fronteggiare:

Quando si prende un'equazione e si elevano ambo i membri ad uno stesso esponente,
l'equazione cui si perviene alla fine *non sempre è equivalente* all'equazione iniziale,
cioè: *non sempre ha le stesse soluzioni* dell'equazione iniziale.

Precisamente:

- ❑ Quando ambo i membri di un'equazione vengono elevati al cubo,
  o comunque ad esponente **DISPARI**,
  tutto "fila liscio" perché l'equazione "di arrivo" è sempre equivalente a quella "di partenza"

MENTRE

- ❑ quando ambo i membri di un'equazione vengono elevati al quadrato,
  o comunque ad esponente **PARI**,
  PUO' DARSI che l'equazione "di arrivo" abbia
  QUALCHE SOLUZIONE IN PIU' RISPETTO A QUELLA DI PARTENZA.

**L'elevamento ad esponente PARI di un'equazione è dunque un passaggio "insidioso",
perché potrebbe (uso il condizionale: non sempre ciò succede, ma *è possibile che* succeda)
avere l'effetto di introdurre delle "false soluzioni", delle "soluzioni non accettabili".**

Prendiamo ad esempio l'equazione

(1) $\sqrt{2x+1}=x-7$

Se la eleviamo al quadrato, otteniamo

(2) $\left(\sqrt{2x+1}\right)^2=(x-7)^2$

Risolviamo dunque la (2): avremo

$$2x+1=x^2-14x+49; \qquad x^2-16x+48=0$$

e troveremo due soluzioni: $x=4$ e $x=12$.

Sennonché, andando a riprendere l'equazione iniziale (1), potremo constatare che,
mentre $x=12$ ne è, effettivamente, soluzione (prova a sostituire e vedrai), invece $x=4$ NON lo è:

$$[1°\,membro]_{x=4}=\left[\sqrt{2x+1}\right]_{x=4}=\sqrt{8+1}=\sqrt{9}=3$$

$$[2°\,membro]_{x=4}=[x-7]_{x=4}=4-7=-3$$

Insomma, il valore $x=4$ "va bene" per l'equazione DI ARRIVO (2),
ma "NON va bene" per l'equazione DI PARTENZA (1),
perché non rende i due membri della (1) UGUALI, bensì li rende OPPOSTI !!!

La spiegazione di tutto ciò sta in una considerazione molto elementare.

- **Se due numeri sono uguali, allora sono uguali anche i loro quadrati (questo è ovvio!):**
  $\mathbf{a = b \Rightarrow a^2 = b^2}$

  … MA NON VALE IL VICEVERSA, cioè:

- **se i quadrati di due numeri sono uguali, allora non è detto che siano uguali anche i due numeri iniziali:**
  questi potrebbero essere uguali, ma potrebbero anche essere opposti.
  $\mathbf{a^2 = b^2 \underset{\text{"NON IMPLICA"}}{\not\Rightarrow} a = b}$**;**
  l'implicazione valida è invece quest'altra: $\mathbf{a^2 = b^2 \Rightarrow a = b \text{ VEL } a = -b}$

Dunque se noi prendiamo un'equazione

$$(1) \quad A(x) = B(x)$$

e la eleviamo al quadrato, ottenendo:

$$(2) \quad [A(x)]^2 = [B(x)]^2$$

è garantito che ogni soluzione della (1) sia anche soluzione della (2),
ma non è detto invece che avvenga anche il viceversa!
Se un certo valore di x è soluzione della (2),
vuol dire che quel valore di x rende uguali i QUADRATI delle due espressioni $A(x)$ e $B(x)$;
ma riguardo alle espressioni $A(x)$ e $B(x)$, potrebbe renderle UGUALI oppure renderle OPPOSTE.
E in quest'ultimo caso, il valore di x in questione sarebbe soluzione della (2), ma NON della (1).

Ricapitolando schematicamente:

Date le due equazioni

$$\textbf{(1)} \qquad A(x) = B(x)$$

$$\textbf{(2)} \qquad [A(x)]^2 = [B(x)]^2$$

si ha che

$$(1) \Rightarrow (2)$$

quindi ogni soluzione di (1) è anche soluzione di (2);
passando dalla (1) alla (2) non perdiamo soluzioni;
però

$$(2) \not\Rightarrow (1)$$

quindi, presa una soluzione di (2), non è certo che questa sia pure soluzione di (1):
potrebbe esserlo, ma anche non esserlo.
Passando dalla (1) alla (2), può darsi che si acquistino indesiderate "false soluzioni".

Come fare, allora, di fronte ad un'equazione irrazionale la cui risoluzione abbia comportato almeno una volta l'elevamento al quadrato, o comunque ad esponente pari?

Semplice!

Abbiamo visto che elevando ad esponente pari, non perdiamo nessuna soluzione, ma potremmo disgraziatamente "acquistare" una o più "false soluzioni", "soluzioni non accettabili".
Allora …

… basterà ricordarsi, alla fine, di prendere ciascuna soluzione trovata
e sostituirla nell'equazione iniziale.
Se l'uguaglianza risulterà verificata, tutto OK,
mentre se l'uguaglianza non risulterà verificata,
vorrà dire che quella soluzione non è accettabile e la scarteremo.

Osserviamo che
questo problema dell'eventuale "non accettabilità" non si presenta invece quando l'eliminazione dei radicali richiede soltanto elevamenti ad esponente DISPARI.

Infatti (riferendoci, per fissare le idee, all'esponente 3):

- se due numeri sono uguali, allora sono uguali anche i loro cubi,

E VICEVERSA:

- se i cubi di due numeri sono uguali, allora sono uguali anche i due numeri iniziali.

Insomma,

$$a = b \Leftrightarrow a^3 = b^3$$

Perciò

$$A(x) = B(x) \Leftrightarrow [A(x)]^3 = [B(x)]^3$$

e il fatto che valga la DOPPIA implicazione ci assicura che

i) ogni soluzione di $A(x) = B(x)$ è anche soluzione di $[A(x)]^3 = [B(x)]^3$ (implicazione $\Rightarrow$)

ii) ogni soluzione di $[A(x)]^3 = [B(x)]^3$ è anche soluzione di $A(x) = B(x)$ (implicazione $\Leftarrow$)

ovvero le due equazioni

$$A(x) = B(x), \quad [A(x)]^3 = [B(x)]^3$$

hanno LE STESSE soluzioni, sono "**EQUIVALENTI**".

Per completare il discorso, occorre dire che c'è anche UN ALTRO MOTIVO per cui,
elevando ad esponente PARI ambo i membri di un'equazione,
può capitare che si pervenga ad un'equazione non equivalente a quella di partenza.

Consideriamo l'equazione seguente: $\sqrt{2x-13} = \sqrt{x-7}$
Elevando al quadrato, si ottiene $2x-13 = x-7$ con la soluzione $x = 6$.
Però a questo punto si vede che il valore trovato $x = 6$ NON è soluzione dell'equazione iniziale,
perché, sostituendo in essa, si ottengono **radici quadrate di numeri negativi**.
Ora, se - come di norma avviene - si vuol restare rigorosamente nel campo dei numeri reali,
se ne conclude che le operazioni in gioco non sono eseguibili
e che quindi $x = 6$ è "soluzione non accettabile".

La ragione per cui

$$2x-13 = x-7 \underset{\text{NON IMPLICA}}{\not\Rightarrow} \sqrt{2x-13} = \sqrt{x-7}$$

NON sta questa volta nel fatto che quadrati uguali $\underset{\text{NON IMPLICA}}{\not\Rightarrow}$ basi uguali

(un'espressione contenente *x* può essere pensata - nell'ambito dei numeri reali -
come il quadrato di un'altra, soltanto limitatamente a quei valori di *x* che la rendono positiva!)

Qui siamo invece di fronte alla circostanza per cui
se un certo valore di *x* verifica un'equazione $C(x) = D(x)$,
ma ne rende i due membri entrambi negativi,
quel valore di *x* NON sarà soluzione della $\sqrt{C(x)} = \sqrt{D(x)}$,
per il fatto che non ne renderà i due membri uguali, bensì entrambi privi di significato (in $\mathbb{R}$).

Osserviamo che, anche relativamente a quest'ultima questione,
se i radicali in gioco hanno indice dispari il problema non si presenta:
una radice con indice dispari è eseguibile in campo reale anche se il radicando è negativo.

ESEMPI SVOLTI

- $2\sqrt{8-x}+x=5$

  Isolo innanzitutto il radicale, ottenendo

  $2\sqrt{8-x}=5-x$

  ... e ora elevo al quadrato, per sbarazzarmi della radice quadrata:

  $\left(2\sqrt{8-x}\right)^2=(5-x)^2$

  $4(8-x)=25-10x+x^2$

  $32-4x=25-10x+x^2$

  $x^2-6x-7=0$

  $(x+1)(x-7)=0$

  $\boxed{x=-1} \vee \underset{\text{non accettabile}}{\cancel{x=7}}$

  Verifica tu stesso, sostituendo nell'equazione iniziale o comunque nel passaggio che precede l'elevamento al quadrato, che una delle soluzioni trovate è accettabile e l'altra no.

- $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}-2\sqrt{6-x}=0$

  Se elevassi al quadrato ora, a primo membro avrei il quadrato di un trinomio e svolgendolo otterrei – nei doppi prodotti – altre tre radici quadrate!!!
  Conviene invece dapprima ripartire le radici in modo più equilibrato fra i due membri (due da una parte e una dall'altra)
  perché così, elevando successivamente al quadrato, il numero delle radici diminuirà.

  $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{6-x}$

  $\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}\right)^2=\left(2\sqrt{6-x}\right)^2$

  $x\cancel{+4}+x\cancel{-4}+2\sqrt{(x+4)(x-4)}=4(6-x)$

  $2x+2\sqrt{x^2-16}=24-4x$

  $\cancel{2}\sqrt{x^2-16}=\cancel{24}^{12}-\cancel{6}^{3}x$

  $\left(\sqrt{x^2-16}\right)^2=(12-3x)^2$

  $x^2-16=144-72x+9x^2$

  $\cancel{8}x^2-\cancel{72}^{9}x+\cancel{160}^{20}=0$

  $(x-4)(x-5)=0 \quad \boxed{x=4} \vee \underset{\text{non accettabile}}{\cancel{x=5}}$

- $\sqrt[3]{x^3-4x}+2=x$

  $\sqrt[3]{x^3-4x}=x-2$

  $\left(\sqrt[3]{x^3-4x}\right)^3=(x-2)^3$

  $\cancel{x^3}-4x=\cancel{x^3}-6x^2+12x-8$

  $6x^2-16x+8=0$

  $3x^2-8x+4=0$

  $x_{1,2}=\dfrac{4\pm\sqrt{16-12}}{3}=\dfrac{4\pm\sqrt{4}}{3}=\dfrac{4\pm2}{3}=\begin{cases}\boxed{2/3}\\ \boxed{2}\end{cases}$

  *Se ora vuoi fare la verifica sostituendo, falla pure, ma a dire il vero è **superflua**!*
  *Infatti abbiamo elevato al cubo (**esponente dispari**) e non al quadrato, quindi le soluzioni trovate saranno senz'altro accettabili.*