Matematica e Problemi della Realtà	**EQUAZIONI IRRAZIONALI E SITUAZIONI REALI**

IL POZZO

Lasciando cadere un sasso in un pozzo profondo, il suono dello "splash" si sente dopo 3,2 secondi. Qual è la profondità *s* del pozzo?

Sarebbe sbagliato, di fronte a questo problema, utilizzare unicamente la formula $s=\frac{1}{2}gt^2$ che mette in relazione lo spazio e il tempo in un moto sotto l'azione della sola forza di gravità. Infatti, a parte la questione della resistenza dell'aria al moto del sasso che comunque si può ritenere trascurabile, se si applicasse questa formula per trovare *s* a partire da $t=3,2$ non si terrebbe conto del fatto che quei $3,2$ secondi sono la somma di DUE intervalli di tempo:

1) il tempo t_1 che ci mette il SASSO per arrivare a toccare l'acqua in fondo al pozzo;
2) il tempo t_2 che impiega il SUONO per risalire dalla superficie dell'acqua alle orecchie dell'osservatore.

Per quanto riguarda t_1, abbiamo la relazione

$$s=\frac{1}{2}gt_1^2\approx\frac{1}{2}\cdot 9,8\cdot t_1^2=4,9t_1^2$$

quindi $t_1\approx\sqrt{\frac{s}{4,9}}$

mentre t_2 è legato a *s* dalla relazione

$$s=v_S\cdot t_2$$

dove v_S è la velocità del suono nell'aria.

Ora, tale velocità dipende dalla temperatura: a 21 °C è di circa 344 m/s, ma nel nostro pozzo fa decisamente freddino (5 °C pressappoco), e in queste condizioni la velocità del suono nell'aria si abbassa a circa 334,5 m/s. Dunque

$$s=v_S\cdot t_2\approx 334,5\cdot t_2\,;\quad t_2\approx\frac{s}{334,5}$$

A questo punto, sapendo che $t_1+t_2=3,2$ possiamo scrivere l'equazione irrazionale

$$\sqrt{\frac{s}{4,9}}+\frac{s}{334,5}=3,2$$

che ora risolveremo, armandoci di macchinetta calcolatrice perché i calcoli si preannunciano piuttosto impegnativi; in alternativa, potremmo utilizzare un foglio elettronico.

$$\sqrt{\frac{s}{4,9}}=3,2-\frac{s}{334,5}\quad (*)$$

$$\frac{s}{4,9}=10,24-\frac{6,4s}{334,5}+\frac{s^2}{334,5^2}$$

$$334,5^2\cdot s=4,9\cdot 334,5^2\cdot 10,24-4,9\cdot 334,5\cdot 6,4\cdot s+4,9\cdot s^2$$

...

$$4,9\cdot s^2-334,5\cdot 365,86\cdot s+4,9\cdot 334,5^2\cdot 10,24=0$$

Converrà a questo punto dividere per 4,9 (tanto, se non dividiamo ora, comunque quel 4,9 andrebbe a finire a denominatore nella formula risolutiva); arrotondando all'intero il 2° e il 3° coefficiente, avremo

$$s^2-24976s+1145756=0$$

e con la formula ridotta

$$s_{1,2}=12488\pm\sqrt{155950144-1145756}=12488\pm\sqrt{154804388}\approx 12488\pm 12442=\left\langle\begin{array}{l}46\\ \cancel{24930}\end{array}\right.$$

La seconda soluzione dell'equazione di 2° grado va evidentemente scartata, e d'altronde ci rendiamo conto che, sostituendola nell'equazione irrazionale al passaggio (*) che precede immediatamente l'elevamento al quadrato, essa renderebbe negativo il 2° membro … ma il 1° membro di (*) è un radicale quadratico, che *non può* assumere valore negativo, da cui la non accettabilità di tale soluzione.

Il nostro pozzo ha una profondità (dall'esterno alla superficie dell'acqua) di circa 46 metri.

ESERCIZI (risposte a pag. 88)

1) **IL PENDOLO**

Il periodo di un pendolo (ossia, l'intervallo di tempo affinché il pendolo compia un'oscillazione completa) è dato dalla formula

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

dove T è il periodo in secondi, ℓ la lunghezza del pendolo in metri, g è l'accelerazione di gravità, che sulla superficie terrestre vale circa 9,8 metri al secondo per secondo.

Se in un lontano pianeta un pendolo lungo 1 metro e 80 cm oscilla con un periodo di 2 secondi e ¼ di secondo, quanto vale l'accelerazione di gravità g su quel pianeta?

2) **VISIBILITA'**

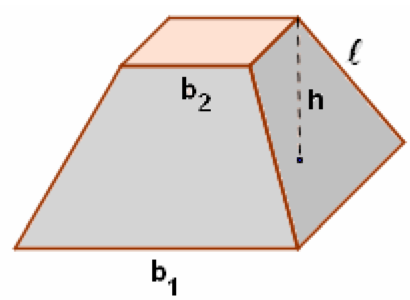
Si legge su parecchi siti anglosassoni che la distanza, sulla superficie terrestre, fino a cui si può vedere in una giornata limpida, può essere suppergiù approssimata dalla seguente formula:

$$v = \frac{1225\sqrt{a}}{1000},$$

dove v è la visibilità in miglia e a l'altezza dell'osservatore, espressa in piedi.
1 miglio è uguale a circa 1609 metri, e un piede a circa 30,5 cm.
Se la distanza massima cui si riesce a vedere è di circa 220 km, sulla cima di quale delle seguenti montagne ci si potrebbe trovare?

a) Mount Watson, Alaska, 3809 m
b) Mount Whitney, California, 4421 m
c) Mount Saint Elias, Alaska, 5489 m
d) Mount McKinley, Alaska, 6194 m

3) **ANTICHE VESTIGIA**



In una remota regione tropicale, è stata rinvenuta una costruzione a forma di tronco di piramide, con $b_1 = \text{m}\,30$, $b_2 = \text{m}\,20$, $\ell = \text{m}\,25$ (ℓ è uno degli spigoli).

Sapendo che sussiste la formula $\ell = \sqrt{h^2 + \frac{1}{2}(b_1 - b_2)^2}$

- determina l'altezza *h* della costruzione
- e stabilisci anche quanto misura l'apotema del tronco

4) **CONO**

La superficie laterale di un cono è data da $S_L = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$, se *r* è il raggio di base e *h* l'altezza.

- Supponi nota la superficie laterale e il raggio, e inverti la formula per determinare l'altezza *h*.
- Supponi $S_L = 5\text{ m}^2$ e $h = 1\text{ m}$; determina il raggio *r* in metri con la precisione di 2 cifre decimali

5) **BALENE** (da *Intermediate Algebra* di Ron Larson e Kimberly Nolting)

The weight *w* (in pounds) of a killer whale can be modeled by

$$w = 280 + 325\sqrt{t}\,,\quad 0 \le t \le 144$$

where *t* represents the age (in months) of the killer whale.
What age did the killer whale weigh about 3400 pounds?

6) **TSUNAMI** (da www.regentsprep.org)

The speed that a tsunami can travel is modeled by the equation

$$S = 356\sqrt{d}$$

where *S* is the speed in km per hour and *d* is the average depth of the water in km

a) What is the speed of the tsunami when the average water depth is 0.512 km?
b) Solve the equation for *d*
c) A tsunami is found to be traveling at 120 km per hour. What is the average depth of the water?

7) **SOFFIA IL VENTO** (da *Intermediate Algebra* di Ron Larson e Kimberly Nolting)

The Beaufort wind scale was devised to measure wind speed.

Beaufort number	Force of wind	Effects of wind
0	Calm	Smoke rises vertically
1	Light air	Direction shown by smoke
2	Light breeze	Leaves rustle; wind felt on face
3	Gentle breeze	Leaves move; flags extend
4	Moderate breeze	Small branches sway; paper blown about
5	Fresh breeze	Small trees sway
6	Strong breeze	Large branches sway; umbrellas difficult to use
7	Moderate gale	Large trees sway; walking difficult
8	Fresh gale	Twigs break; walking hindered.
9	Strong gale	Branches scattered about; slight damage to buildings
10	Whole gale	Trees uprooted; severe damage to buildings
11	Storm	Widespread damage
12	Hurricane	Devastation

The Beaufort numbers B, which range from 0 to 12, can be modeled by

$B = 1,69\sqrt{s+4,45} - 3,49$ where s is the speed (in miles per hour) of the wind.

Find the wind speed that corresponds to the Beaufort number $B = 11$.

8) **CHIODI**

The length ℓ (in inches) of a standard nail can be modeled by $\ell = 54d^{3/2}$ where d is the diameter (in inches) of the nail. What is the diameter of a standard nail that is 3 inches long?

9) **BRRR …**

Un indicatore che viene utilizzato per quantificare in qualche modo il disagio dovuto alla combinazione di freddo e di vento, è il cosiddetto "wind chill" (*wind* = *vento*, *chill* = *freddo, gelo*).
Esso indica la temperatura percepita, quando oltre al freddo c'è anche il vento che complica le cose.
Del "wind chill" si tiene conto nelle nazioni molto fredde per prendere decisioni
sulla eventuale chiusura delle scuole, sulla raccolta dell'immondizia …

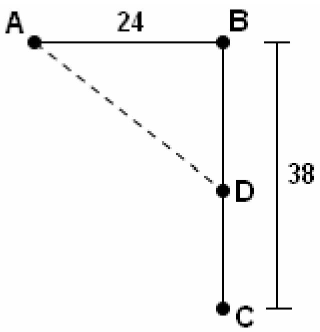
In un sito dello Yukon (Canada), troviamo la seguente formula lì utilizzata per il calcolo del *wind chill (abbiamo arrotondato i coefficienti, che sono più complicati nella formula originaria)*:

$$W = \left(12 + 6\sqrt{v} - 0,3v\right)\left(33 - T\right)$$

Qui W è appunto l'indice *wind chill*,
v la velocità del vento in km/h,
T la temperatura in gradi centigradi.

Supponiamo ora che la temperatura sia di 22 sotto zero
e che la televisione abbia comunicato che il *wind chill* vale 2310.
Risali, tramite la formula, alla velocità del vento.

10) **NEL DESERTO E SULLA STRADA**



A una traversata del deserto, da A fino a D,
alla velocità costante di 25 km all'ora,
fa seguito la comoda tappa da D a C
sulla strada statale ai 100 km orari.
Tutto il viaggio richiede in totale 1 ora e 24 minuti.
L'angolo di vertice B in figura è retto.
Ora, A dista da B 24 km, B dista da C 38 km …
Ma quale sarà la distanza fra D e C?
(*Armati di macchinetta perché i calcoli sono piuttosto impegnativi, anche se il risultato è intero*)

RISPOSTE

1) Circa 14 m al secondo per secondo 2) a 3) ≈ 24 m; $\approx 24,5$ m 4) $h = \sqrt{\dfrac{S_L^{\,2}}{\pi^2 r^2} - r^2}$; m 1,08 5) ≈ 92 mesi

6) a) ≈ 255 km/h b) $d = (S/356)^2$ c) ≈ 114 m 7) About 69 miles per hour 8) $\approx 0,15$ inches 9) 100 km/h

10) DC = x; $\dfrac{\sqrt{576 + (38-x)^2}}{25} + \dfrac{x}{100} = 1,4$ ... $15x^2 - 936x + 12720 = 0$ ... ; $x = 20\,\text{km}$