2. FUNZIONI LINEARI: RETTE

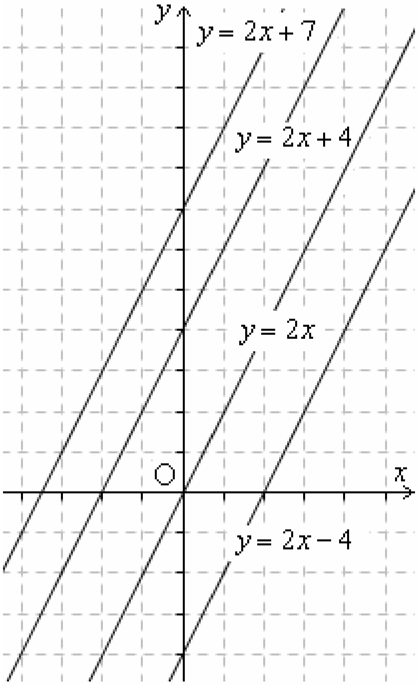
Prova a disegnare, sul tuo quaderno, il grafico di una funzione della forma

$\boxed{\boldsymbol{y = mx + q}}$, **essendo** $\boldsymbol{m, q}$ **due numeri fissati**

(ad esempio, potresti prendere $y = 3x + 4,\ \ y = x - 1,\ \ y = -2x\ \ \ldots$)

Le funzioni della forma $\boldsymbol{y = mx + q}$ sono anche dette "**funzioni di 1° grado**" o "**funzioni lineari**".

Bene! Ti accorgerai che
una funzione di questo tipo ha sempre come grafico una RETTA
(*ecco* perché i matematici utilizzano con lo stesso significato
la locuzione "di 1° grado" e l'aggettivo "lineare"!)



Quelli qui sopra sono i grafici delle rette

$y = 2x + 7$
$y = 2x + 4$
$y = 2x$
$y = 2x - 4$

Come vediamo, tali rette sono fra loro *parallele*.

Da qui possiamo intuire che se due rette

$y = mx + q,\ \ y = m'x + q'$

hanno $m = m'$, allora sono parallele fra loro.

La costante $\boldsymbol{m}$ dell'equazione $y = mx + q$
viene detta "**coefficiente angolare**".

Ricordalo, è importante:

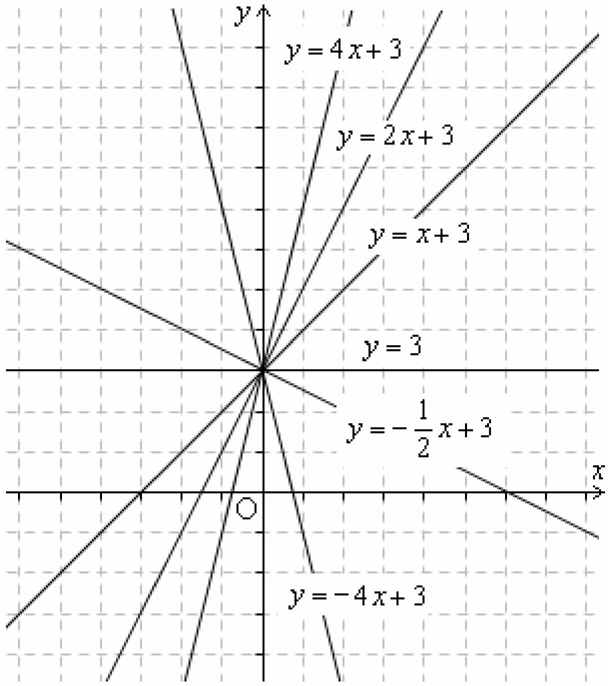
♥ "**Se due rette hanno lo stesso coeff. angolare *m*, allora sono parallele**".

Dalle figure emerge pure il significato della costante *q*.

♥ **La costante *q* esprime l'ordinata del punto nel quale la retta taglia l'asse verticale**.

In effetti, data l'equazione $y = mx + q$,
se si pone $x = 0$ si ottiene $y = q$
per cui la retta in questione passerà per $(0,\ q)$.

La costante $\boldsymbol{q}$ viene detta "l'**ordinata all'origine**",
per il fatto che **indica l'ordinata del punto della retta che sta sopra (o sotto) l'origine**.



Questi altri grafici corrispondono alle rette

$y = 4x + 3 \qquad y = 3$
$y = 2x + 3 \qquad y = -\frac{1}{2}x + 3$
$y = x + 3 \qquad y = -4x + 3$

accomunate dalla stessa "ordinata all'origine" *q*
(mentre i coeff. angolari sono fra loro differenti).

Si vede chiaramente che

♥ **quando il coeff. angolare è positivo** ($m > 0$) **la retta è in salita,**

♥ **quando il coeff. angolare è negativo** ($m < 0$) **la retta è in discesa**,

♥ **quando il coeff. angolare è nullo** ($m = 0$) **la retta è in orizzontale**.

Il caso del coefficiente angolare nullo è quello della "funzione costante", ad esempio

$y = 3$,

che potrebbe anche essere scritta come

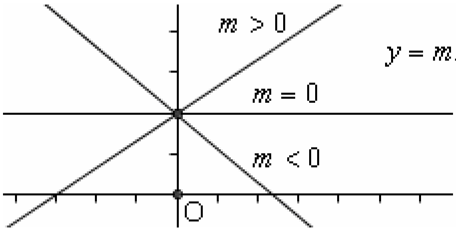
$y = 0 \cdot x + 3$

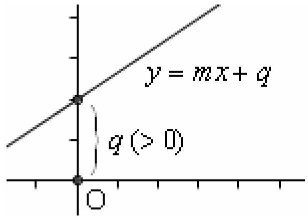
e assume sempre il valore $y = 3$
per qualsiasi valore di *x*.

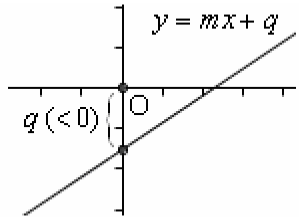
Inoltre,

♥ **quanto più è grande il valore assoluto** $|m|$ del coefficiente angolare, tanto più la retta **è inclinata nella sua salita o discesa.**

RIASSUNTO SCHEMATICO





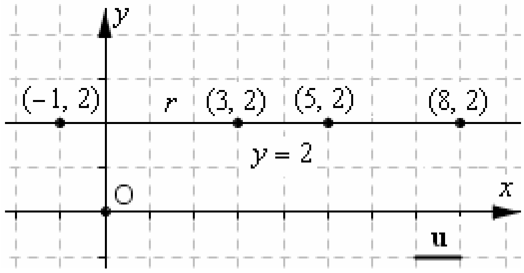


$m =$ *coefficiente angolare* $\quad$ $m > 0$ *salita*, $m < 0$ *discesa*, $m = 0$ *orizzontalità*

$q =$ "*ordinata all'origine*"
$=$ *ordinata del punto che ha* $x = 0$
$=$ *ordinata del punto di intersezione con l'asse y*

RETTE ORIZZONTALI

Sappiamo che **una retta orizzontale (= parallela all'asse *x*) ha coefficiente angolare nullo** $(m = 0)$.
Riflettiamo ancora un attimo su questo fatto.



In effetti, una retta orizzontale è il luogo dei punti del piano cartesiano, con la proprietà di avere una certa ordinata fissata *k* (ad esempio, nella figura qui a fianco è rappresentata la retta formata da tutti e soli i punti di ordinata uguale a 2).
L'equazione "gemellata" a tale retta, ossia l'uguaglianza indicante la proprietà che è caratteristica di tutti i suoi punti e di essi soltanto, è perciò della forma $y = k$ (per la retta in figura, $y = 2$).
Un'uguaglianza del tipo $y = k$ può anche essere riscritta come $y = 0 \cdot x + k$;
vediamo che qualunque valore si attribuisca a *x*, la *y* corrispondente vale sempre *k*,
e il moltiplicatore di *x*, ossia il coefficiente angolare, è appunto 0.

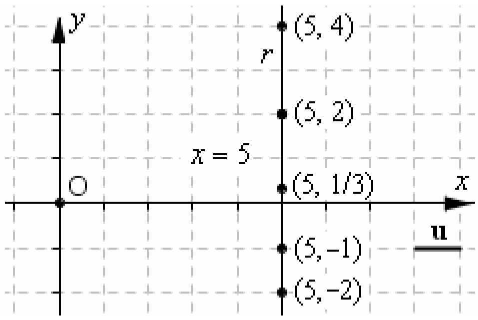
Riassumendo: **il coefficiente angolare $m = 0$ è associato all'orizzontalità**;
♥ **una retta orizzontale** (NOTA) **ha** dunque **equazione della forma $y = k$ (*k* costante)**

NOTA: spesso in queste pagine ci prendiamo la licenza, per brevità, di scrivere "retta *orizzontale/verticale*" quando invece dovremmo parlare di "retta *parallela all'asse delle ascisse/ordinate*". Di norma, in effetti, l'asse delle ascisse è disposto orizzontalmente rispetto all'osservatore, e quello delle ordinate verticalmente.

RETTE VERTICALI

♥ **Per una retta "verticale" (= parallela all'asse delle *y*) il coefficiente angolare non esiste, non è definito.**

Infatti si intende per "coefficiente angolare" la costante che moltiplica *x* in un'equazione della forma $y = mx + q$;
ma una retta verticale *non ha* un'equazione di tal forma.
L'equazione di una retta (o, più in generale, di una data curva sul piano cartesiano) esprime una proprietà "caratteristica" dei punti di quella retta, ossia una proprietà che è posseduta dalle coordinate *x*, *y* di tutti i punti di quella retta, e di essi soltanto.
Ora, prendiamo la retta verticale della figura a destra.
Qual è la proprietà che caratterizza i suoi punti?
E' facile riconoscere che i suoi punti sono tutti e soli i punti del piano cartesiano, la cui ascissa è 5.
Pertanto tale retta sarà associata all'equazione $x = 5$.
… Impossibile riscriverla sotto la forma $y = mx + q$!

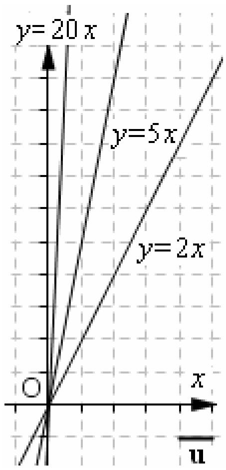


♥ Anche **l'asse delle *y*** è una particolare retta verticale: la sua equazione è $\boldsymbol{x = 0}$.
♥ E **l'asse *x*** è una particolare retta orizzontale, di equazione $\boldsymbol{y = 0}$.

♥ **Una retta verticale ha equazione della forma $x = k$.**
Osserviamo che tale equazione
- ❑ NON indica una funzione in cui *x* sia var. indipendente
- ❑ NON può essere portata sotto la forma $y = mx + q$.

♥ **DA UN CERTO PUNTO DI VISTA, si può però dire che "una retta verticale ha coefficiente angolare INFINITO".**
Questa affermazione va interpretata nel senso che
"se una retta ha inclinazione altissima, quasi verticale, il suo coefficiente angolare sarà grandissimo, tendendo all'infinito all'aumentare dell'inclinazione".

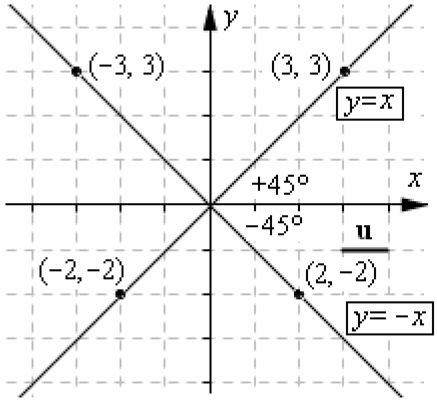
Osserva la figura qui a fianco. E immagina che inclinazione avrebbe una retta con coefficiente angolare uguale a 1.000.000.000 !!!



BISETTRICI DEI QUADRANTI E RETTE INCLINATE DI 45°

- ♥ **La bisettrice del 1° e 3° quadrante ha equazione $y = x$**
  (è il luogo dei punti del piano cartesiano
  la cui ordinata è uguale all'ascissa).
  Quindi **il coefficiente angolare $m = 1$**
  contraddistingue le rette che, rispetto all'asse orizzontale,
  sono inclinate di **45° in salita (+ 45°)**.

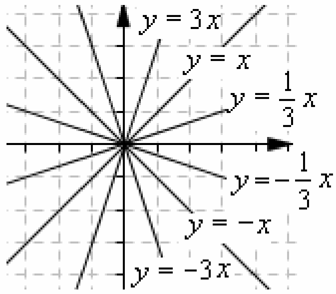
- ♥ **La bisettrice del 2° e 4° quadrante ha equazione $y = -x$**
  (è il luogo dei punti del piano cartesiano
  la cui ordinata è uguale all'opposto dell'ascissa).
  Quindi **il coefficiente angolare $m = -1$**
  contraddistingue le rette che, rispetto all'asse orizzontale,
  sono inclinate di **45° in discesa (– 45°)**.



Le bisettrici dei quadranti

RETTE CON INCLINAZIONE MAGGIORE, O MINORE, DI 45°

- **Una retta, con inclinazione (in salita o in discesa) > 45°, ha $|m| > 1$;**
  una retta, con inclinazione (in salita o in discesa) < 45°, ha $0 \le |m| < 1$
- **Due rette, che siano ugualmente inclinate,**
  ma una in salita e l'altra in discesa,
  hanno coefficienti angolari fra loro OPPOSTI.
- ♥ **Si può dimostrare che due rette PERPENDICOLARI**
  hanno coefficienti angolari fra loro ANTIRECIPROCI
  (si dice "antireciproco" l'opposto del reciproco).



LA PROPRIETA' FONDAMENTALE DEL COEFFICIENTE ANGOLARE

Prendi una retta qualsiasi: che so, la $y = 2x + 3$. Adesso, assegna a x due valori, per calcolare i corrispondenti valori di y e determinare dunque due punti della retta stessa. Ad esempio,

- puoi porre $x = 1$, e avrai quindi $y = 2 \cdot 1 + 3 = 5$ e di conseguenza un primo punto $\mathrm{A}(1,\ 5)$;
- poi puoi porre $x = 4$, e avrai quindi $y = 2 \cdot 4 + 3 = 11$ da cui un secondo punto $\mathrm{B}(4,\ 11)$.

Ora vai a calcolare il rapporto (= quoziente) fra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse dei due punti ottenuti:

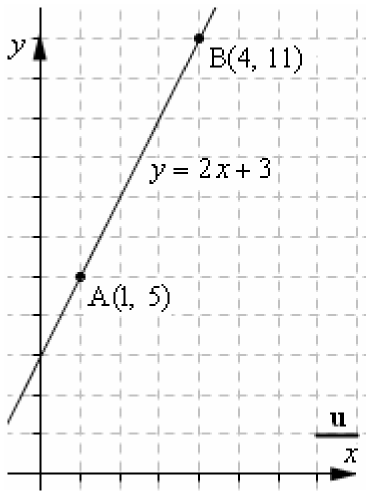
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \underset{\text{NOTA}}{=} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{11-5}{4-1} = \frac{6}{3} = \boxed{2}$$

Come hai potuto vedere, il risultato di questo calcolo coincide col coefficiente angolare m della retta.

Prova con un'altra coppia di punti, fai nuovamente il calcolo: otterrai ancora lo stesso valore, il valore del coefficiente angolare.
Prendi un'altra retta, considera una coppia di suoi punti: vedrai che il calcolo

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ ovvero } \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

darà sempre il coefficiente angolare m di quella retta.



Ecco una retta $y = 2x + 3$, *e due suoi punti* $\mathrm{A}(1,\ 5);\ \mathrm{B}(4,\ 11)$.
Calcoliamo $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$;
avremo $\frac{11-5}{4-1} = \frac{6}{3} = \boxed{2}$.
Ma 2 è il coeff. angolare!!!

Vale dunque (lo si potrebbe dimostrare in generale) la **formula**

$$♥ \quad \boxed{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m} \quad \text{(importantissima!)}$$

Data una retta di equazione $y = mx + q$,
il suo coefficiente angolare m
è uguale al rapporto
fra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse
di due punti qualsiasi della retta stessa.

NOTA - Il simbolo Δ è sovente utilizzato, in matematica, per indicare "differenza".
Ad es., fra due persone che hanno risp. 15 anni e 47 anni, c'è una differenza di età $\Delta e = 47 - 15 = 32$.
Presi, in Fisica, due istanti di tempo successivi t_1 e t_2, nei quali la velocità di un corpo è risp. v_1 e v_2, allora nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ l'incremento di velocità (>, < o = 0) è dato da $\Delta v = v_2 - v_1$.

E’ utile ed importante osservare (vedi figura) che

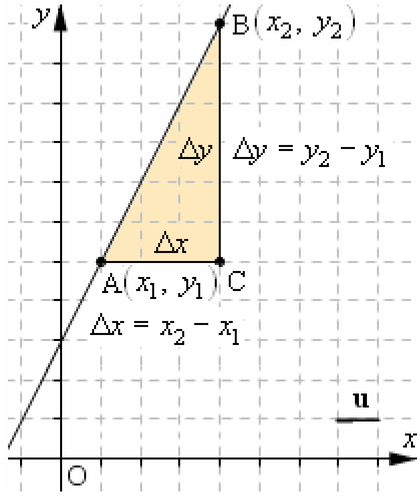
♥ le due quantità Δx e Δy corrispondono alle due misure (con segno) dei due segmenti orizzontale (Δx) e verticale (Δy) che occorre percorrere per passare dal primo punto al secondo

… **misure CON SEGNO**, nel senso che

il segmento orizzontale andrà preso col segno
- positivo se viene percorso da sinistra verso destra,
- negativo se viene percorso da destra verso sinistra;

e allo stesso modo

il segmento verticale andrà preso col segno
- positivo se viene percorso dal basso verso l’alto,
- negativo se viene percorso dall’alto verso il basso.



Quanto sopra ci dice che in una funzione “lineare”, ossia della forma $y = mx + q$, l’incremento di x è proporzionale all’incremento corrispondente di y: il rapporto fra questi due incrementi è costante.
Si può dimostrare che VALE ANCHE IL VICEVERSA:
se due grandezze x, y sono legate fra loro in modo tale che l’incremento di x è proporzionale all’incremento corrispondente di y (se raddoppia uno, raddoppia anche l’altro …)
allora la relazione tra le due grandezze è della forma $y = mx + q$.

Segnaliamo infine che molti testi chiamano “**AFFINE**” una funzione della forma $y = ax + b$, riservando il termine “**LINEARE**” solo, o prevalentemente, al caso in cui $b = 0$ ($y = ax$).

ENGLISH
- coefficiente angolare = **slope** (lett.: *pendenza*), o **gradient**
- ordinata all’origine = **y-intercept**
- $\Delta y / \Delta x$ = “**rise over run**” = spostamento *verticale fratto spostamento laterale*

DISEGNARE UNA RETTA CONOSCENDONE UN PUNTO E IL COEFFICIENTE ANGOLARE

Se noi sappiamo che una retta passa per un dato punto P_0,
e conosciamo il coefficiente angolare m di quella retta,
potremo disegnare la retta con precisione
anche senza aver determinato la costante q dell’equazione $\boldsymbol{y = mx + q}$.

Infatti, poiché sappiamo che per il coefficiente angolare vale la formula $\boldsymbol{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$,

ci basterà fare il disegno in modo che la retta passi per P_0
e per un altro punto P_1 per ottenere il quale partiremo da P_0 e ci sposteremo
- ♪ prima orizzontalmente di un segmento orientato Δx
- ♫ poi verticalmente di un altro segmento orientato Δy,

dopo aver scelto Δx e Δy in modo tale che il loro quoziente sia uguale a quel valore m che ci interessa.

- ❑ Ad esempio (figura 1), per disegnare la retta passante per $P_0(3,3)$ e avente coefficiente angolare $m = 2$, possiamo partire da P_0 e poi spostarci di 1 verso destra ($\Delta x = 1$) e di 2 verso l’alto ($\Delta y = 2$). Troveremo così il nuovo punto P_1, tale che la retta P_0P_1 avrà $m = \Delta y / \Delta x = 2$ e sarà perciò la retta desiderata.
- ❑ Facciamo un altro esempio (fig. 2). Per disegnare la retta passante per $A(1,5)$ e di coeff. ang. $m = -3/4$, possiamo partire da A e spostarci di 4 verso destra ($\Delta x = 4$) poi di 3 verso il basso ($\Delta y = -3$). Raggiungeremo così un nuovo punto B e congiungendo A con B il gioco sarà fatto.

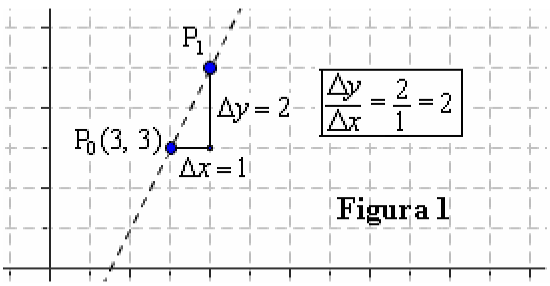


Figura 1

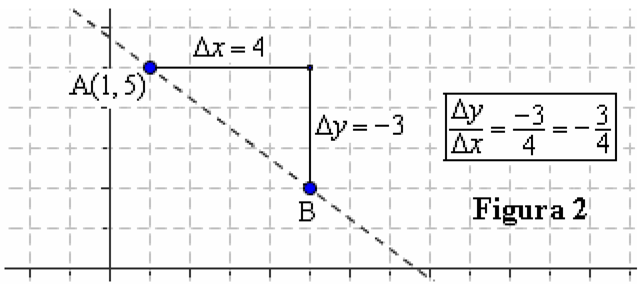


Figura 2

Queste pagine sulla retta sono state riportate pari pari dal volume 1 per comodità del lettore. Per gli ESERCIZI, si rimanda a quel volume.