6. QUALCHE CENNO ALLA "GEOMETRIA ANALITICA"

Abbiamo visto nelle pagine precedenti che le rette verticali fanno eccezione rispetto alle altre rette, perché non vengono associate ad un'equazione della forma $y = \mathrm{m}x + \mathrm{q}$, bensì della forma $x = \mathrm{k}$.

Come insegna quella branca della matematica che è chiamata "Geometria Analitica",
si possono far rientrare tutte le rette, verticali e non, nella categoria delle curve individuate da un'equaz. di 1° grado in *x* e *y*, ossia da un'equazione della forma $\mathrm{a}x + \mathrm{b}y + \mathrm{c} = 0$, con a, b, c costanti non tutte nulle.

Voglio dire: si può dimostrare che l'insieme dei punti (x, y) del piano cartesiano, le cui coordinate soddisfano ad un'equazione di tal forma, è sempre una retta, e che, viceversa, data una qualsiasi retta nel piano cartesiano, essa può essere associata ad un'equazione della forma $\mathrm{a}x + \mathrm{b}y + \mathrm{c} = 0$, nel senso che si può sempre trovare un'equazione di tal forma la quale sia verificata dalle coordinate di tutti e soli i punti della retta in questione.
E nella famiglia delle rette $\mathrm{a}x + \mathrm{b}y + \mathrm{c} = 0$ le verticali saranno tutte, e sole, quelle per le quali è $\mathrm{b} = 0$.

Osserviamo che, data un'equazione del tipo $\mathrm{a}x + \mathrm{b}y + \mathrm{c} = 0$, i suoi coefficienti non sono determinati in modo unico, bensì lo sono "a meno di una costante moltiplicativa".

Intendo con ciò che, se una data equazione $\mathrm{a}x + \mathrm{b}y + \mathrm{c} = 0$ individua una certa retta r, allora individueranno r anche tutte (e sole) le equazioni $\lambda \mathrm{a}x + \lambda \mathrm{b}y + \lambda \mathrm{c} = 0$, con λ costante arbitraria non nulla.

Per esempio:

- l'equazione $4x + 2y - 3 = 0$ individua una retta, che potrà essere disegnata più agevolmente se si porta l'equazione stessa in "forma esplicita", quella che presenta y isolata al primo membro:

  $$4x + 2y - 3 = 0; \quad 2y = -4x + 3; \quad y = -2x + \frac{3}{2}$$

  … ma anche $40x + 20y - 30 = 0$, ottenuta moltiplicando per $\lambda = 10$, individua la medesima retta.

- Ancora: tanto l'equazione $x - 3 = 0$ quanto la $2x - 6 = 0$ o la $3x - 9 = 0$ o la $\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0$ o la $-x\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 0$ individuano sempre la stessa retta verticale $x = 3$, luogo dei punti di ascissa 3.

♥ **La Geometria Analitica sviluppa l'idea secondo la quale, così come un punto del piano cartesiano è individuato, ossia è localizzato in modo univoco, dalla coppia delle sue coordinate (x, y), altrettanto una linea (curva o retta) sul piano cartesiano, se è sufficientemente regolare, può essere individuata da un'equazione nelle due variabili *x* e *y*, nel senso che può essere associata a un'opportuna equazione nelle due variabili *x*, *y* la quale sia verificata dalla coppia (x, y) delle coordinate di tutti i punti della curva, e di essi soltanto.**

Non sempre tale equazione sarà tale da definire una *funzione* di *x* in *y*,
cioè un legame che a partire da un valore di *x* permetta di determinare *un solo* valore di *y*.

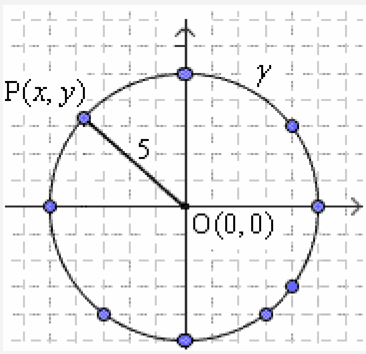
Ad es., prendiamo la circonferenza γ di centro l'origine e raggio 5.
Per determinare l'equazione di questa curva, cerchiamo di stabilire quale sia la condizione alla quale deve soddisfare un punto (x, y) del piano cartesiano, per appartenervi.
γ è il luogo dei punti del piano cartesiano, la cui distanza dall'origine è uguale a 5 unità di misura.
Quindi un punto $\mathrm{P}(x, y)$ del piano cartesiano apparterrà a γ se e soltanto se risulterà $\mathrm{PO} = 5$.
Ma per quali valori della coppia (x, y) è verificata la relazione $\mathrm{PO} = 5$?
Se noi traduciamo in coordinate la relazione $\mathrm{PO} = 5$, otterremo (vedi figura qui a fianco)

$$\boxed{x^2 + y^2 = 25}$$

che è perciò l'equazione cercata.
Un punto del piano cartesiano fa parte della circonferenza γ se e solo se la coppia (x, y) delle sue coordinate soddisfa a tale equazione.
Osserviamo che l'equazione in esame non definisce una funzione: se infatti provassimo a portare in forma esplicita, isolando *y*, otterremmo un doppio segno

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}$$

che ci confermerebbe ciò che è già geometricamente evidente: non è vero che a un valore di *x* corrisponda un solo valore di *y*.



Nel Volume 1 avevamo visto che la distanza fra due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) nel piano cartesiano è data dalla formula

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Dunque

$$\mathrm{PO} = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

per cui si avrà $\mathrm{PO} = 5$ se e solo se

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 5 \text{ o anche } \boxed{x^2 + y^2 = 25}$$