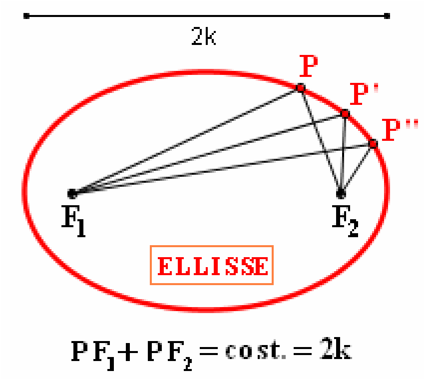
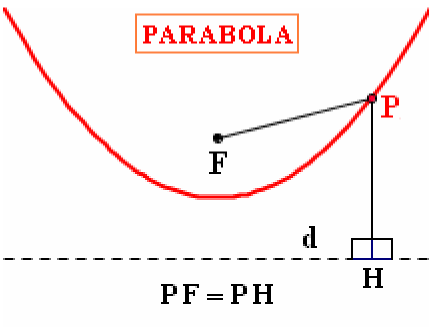
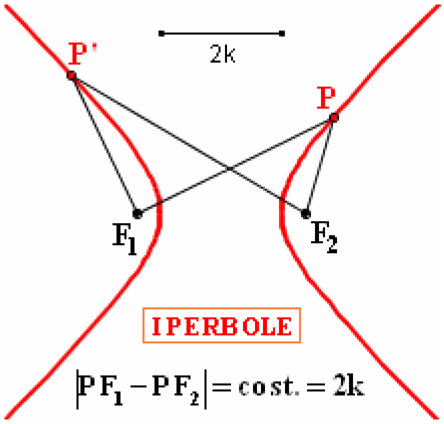
7. SIGNORI, LE CONICHE !!!

Si dicono “*coniche*” tre particolari *curve*
- o meglio: *tipologie* di curve -
chiamate, rispettivamente, *ellisse, parabola e iperbole*.

Eccone le definizioni.



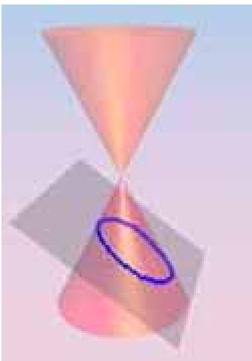




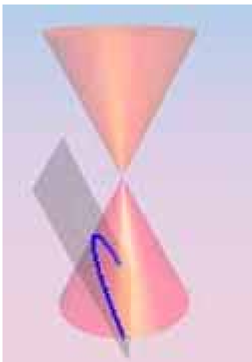
Si dice “ellisse” il luogo dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi, detti “fuochi”	**Si dice “parabola” il luogo dei punti del piano, equidistanti da un punto fisso F (detto “fuoco”) e da una retta fissa d (detta “direttrice”)**	**Si dice “iperbole” il luogo dei punti del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti fissi, detti “fuochi”**

Ma cosa possono avere in comune
tre curve apparentemente così diverse fra loro?
E perché mai vengono chiamate “*coniche*”?

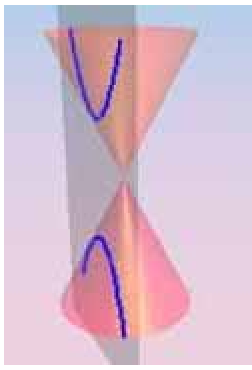
Bene:
sezionando con un piano una doppia superficie conica
(illimitata da entrambe le parti)
si può ottenere,
a seconda dell’inclinazione del piano secante rispetto all’asse del cono:



una curva chiusa…



oppure una curva aperta, ad un solo ramo …



oppure una curva aperta, a due rami

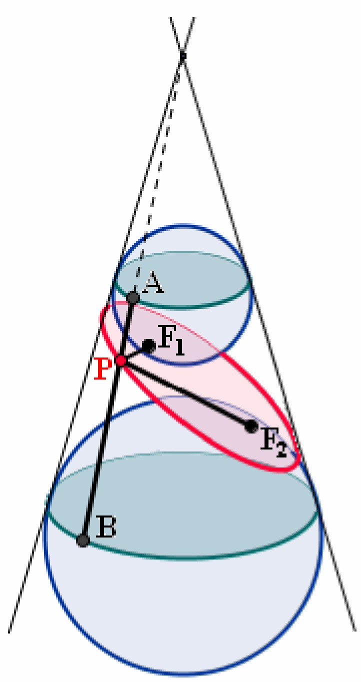
Figure tratte dal sito btc.montana.edu/ceres/ *(Montana State University)*

Si può ora dimostrare che queste tre tipologie di curve, definite “tridimensionalmente”, corrispondono proprio alle tre definizioni di “ellisse”, “parabola” e “iperbole” viste all’inizio, definizioni le quali erano basate esclusivamente su considerazioni di “geometria piana” !!!

Ad esempio, per quanto riguarda l'ellisse,
vale il seguente teorema (Dandelin, 1822):

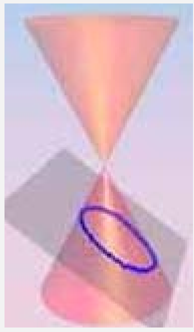
Quando l'intersezione fra una superficie conica e un piano
è una linea chiusa,
questa linea può essere pensata
come il luogo dei punti P del piano secante per i quali si ha
$PF_1 + PF_2 = \textit{costante}$,
dove:

F_1, F_2 sono i punti di contatto fra il piano secante e le due sfere della figura
(ciascuna delle quali è tangente al piano secante e alla superficie conica)
mentre la costante è la distanza, misurata lungo la superficie conica,
fra le due circonferenze lungo le quali le sfere toccano la superficie conica.



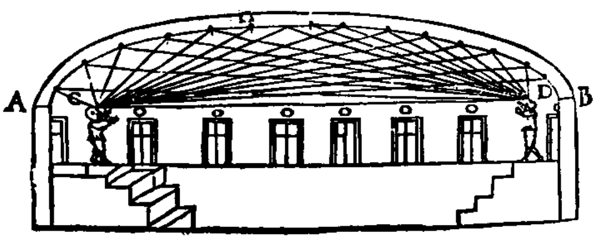
DIMOSTRAZIONE
(*senza approfondire i dettagli* …)

P, il generico punto della linea di cui ci stiamo
occupando, è tale che $PF_1 = PA$ e $PF_2 = PB$
(tangenti alla sfera da uno stesso punto esterno!), per cui
$PF_1 + PF_2 = PA + PB = AB = \textit{costante}$
(costante perché AB ha sempre la stessa lunghezza:
la distanza, misurata lungo la superficie conica,
fra le due circonferenze, è sempre la medesima,
dovunque venga misurata).



Le coniche abbondano di sorprendenti e meravigliose PROPRIETA'

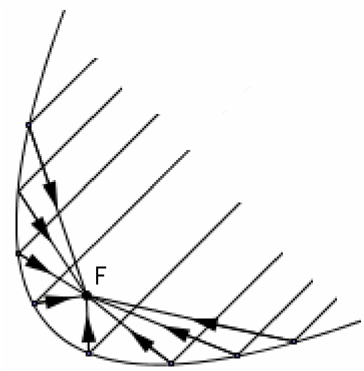
Citiamone una riguardante l'**ellisse**: si può dimostrare che
se un raggio - ad esempio di luce - uscente da un fuoco impatta sulla curva,
il raggio riflesso passerà per l'altro fuoco!



La volta di questa camera è un ellissoide di rotazione.
Se una persona bisbiglia piano piano
con la bocca in corrispondenza di uno dei fuochi,
un amico con l'orecchio nell'altro fuoco
potrà udire chiaramente ogni sua parola,
mentre tutti gli altri presenti nella stanza
non sentiranno nulla.

Una variante consiste
nel piazzare due fiammiferi nei due fuochi:
fregando uno di essi per accenderlo,
ecco che si accenderà istantaneamente pure quell'altro.

Anche la **parabola** gode di una proprietà notevole per quanto riguarda la riflessione.
Un raggio che viaggi parallelamente all'asse di simmetria della parabola,
quando impatta sulla curva, viene riflesso nel fuoco.



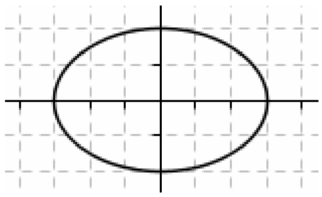
Questo fatto ha un'applicazione notevolissima in tecnologia:
le antenne paraboliche sono infatti caratterizzate
da una forma a paraboloide di rotazione;
le onde elettromagnetiche
provenienti da lontano
vengono concentrate nel fuoco,
dove è collocato il dispositivo di ricezione.

Le coniche sono le curve "associate a relazioni algebriche di secondo grado".

La Geometria Analitica insegna che un'equazione della forma $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$,
ossia **un'equazione di secondo grado in due variabili**, **rappresenta sempre, nel piano cartesiano, una conica (eventualmente degenere)**,
e precisamente:

- una conica di tipo **ellittico** se $b^2-4ac<0$
- una conica di tipo **parabolico** se $b^2-4ac=0$
- una conica di tipo **iperbolico** se $b^2-4ac>0$

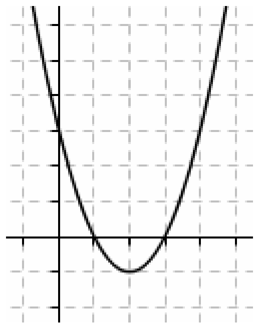
Esempi:



$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

Ellisse,
con centro di simmetria nell'origine
e fuochi sull'asse delle x.

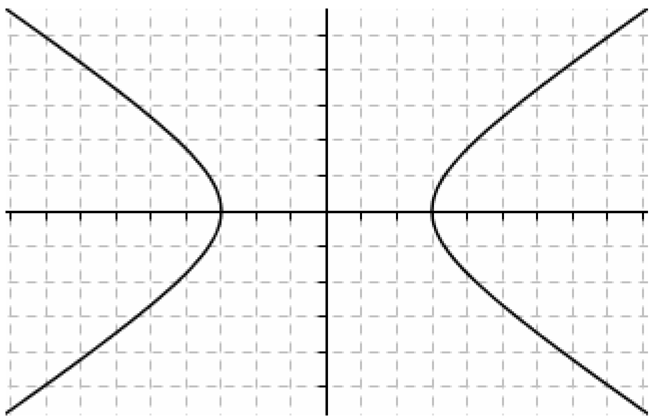
Forma implicita dell'equazione:
$4x^2+9y^2-36=0$
$a=4,\ b=0,\ c=9,\ d=0,\ e=0,\ f=-36$
$b^2-4ac=-144<0\rightarrow$ *tipo ellittico*



$$y=x^2-4x+3$$

Parabola, con asse di simmetria parallelo all'asse y.

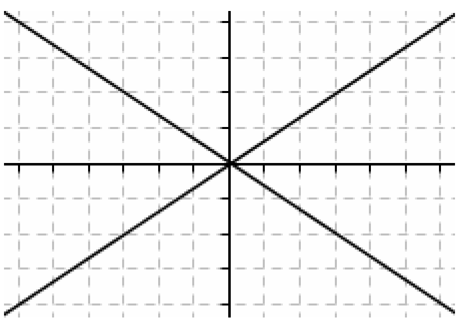
Forma implicita dell'equazione:
$x^2-4x-y+3=0$
$a=1,\ b=0,\ c=0,\ d=-4,\ e=-1,\ f=3$
$b^2-4ac=0\rightarrow$ *tipo parabolico*



$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$$

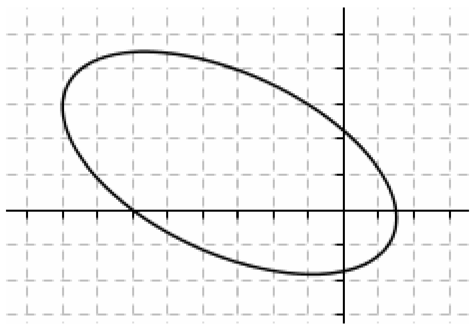
Iperbole,
con centro di simmetria nell'origine
e fuochi sull'asse delle x.

Forma implicita dell'equazione:
$4x^2-9y^2-36=0$
$a=4,\ b=0,\ c=-9,\ d=0,\ e=0,\ f=-36$
$b^2-4ac=144>0\rightarrow$ *tipo iperbolico*



$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=0 \quad \left(4x^2-9y^2=0\right)$$

Iperbole degenere in una coppia di rette



$$\frac{x^2}{9}+\frac{xy}{6}+\frac{y^2}{4}+\frac{x}{2}-\frac{y}{8}=1$$
$$\left(8x^2+12xy+18y^2+36x-9y-72=0\right)$$

Ellisse "traslata e ruotata"

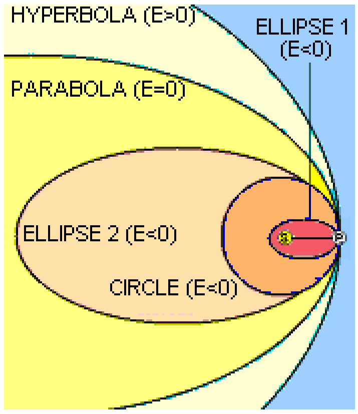
Le coniche hanno un’importanza straordinaria nel mondo fisico.

Ogniqualvolta un corpo celeste orbita intorno ad un altro
(la Luna intorno alla Terra,
i Pianeti intorno al Sole,
le Comete intorno al Sole …)
la traiettoria dell’orbita sarà sempre una conica !!!

Di norma si tratta di un’ellisse (ad es., le orbite dei pianeti intorno al sole sono delle ellissi, di cui il sole occupa sempre uno dei fuochi), ma nel caso di una cometa potrebbe trattarsi (se la cometa non è “periodica”) anche di un ramo di iperbole: la cometa passa in prossimità del sole una sola volta, poi si allontana verso gli spazi stellari e non si avvicinerà mai più.

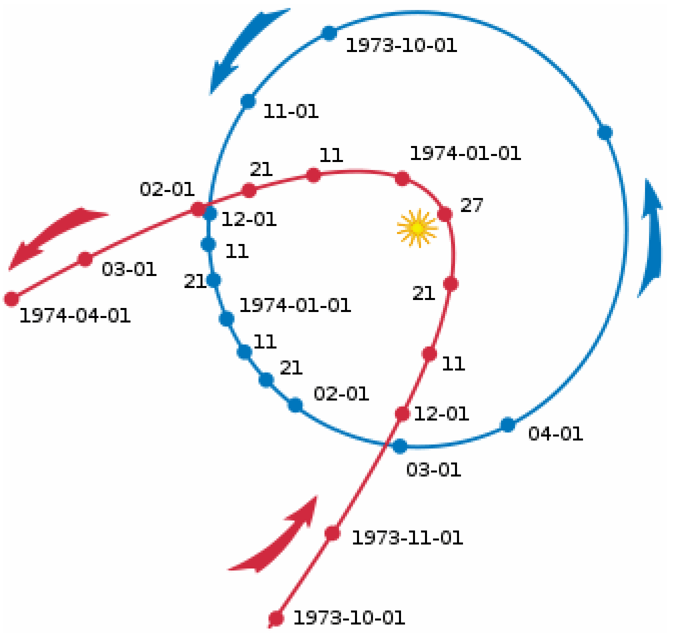
Il tipo di orbita dipende dall’ “energia totale” (cinetica+potenziale) del corpo orbitante:

$E<0 \rightarrow$ orbita ellittica
$E=0 \rightarrow$ orbita parabolica
$E>0 \rightarrow$ orbita iperbolica



La figura sopra riportata è tratta dal sito “[The Celestial Sphere](#)” di Vik Dhillon, Sheffield University, UK

Qui a fianco: l’orbita della cometa Kohoutek e l’orbita della Terra.
Questa cometa percorre un tragitto ellittico facendo un giro completo ogni circa 75.000 anni.



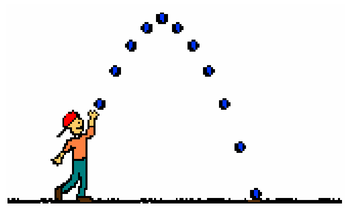
La cometa di Hale-Bopp fotografata da Philipp Salzgeber il 29 marzo 1997

Il fatto che l’attrazione gravitazionale generi traiettorie a forma di conica, è legato alla proprietà della forza F di attrazione gravitazionale di essere inversamente proporzionale al quadrato della distanza d delle due masse m_1, m_2 che si attraggono:

$$F = \frac{G m_1 m_2}{d^2}$$ (G = “costante di gravitazione universale”)

Se la forza responsabile del moto ha questa espressione, si può far vedere che le possibili traiettorie del moto sono esclusivamente le curve associate ad equazioni di 2° grado, ossia, come abbiamo visto, le coniche.

Se lanciamo un oggetto verso l’alto (non verticalmente) la forza di gravità lo porterà a muoversi lungo un arco di parabola.



Un ultimo spunto, fra i tanti possibili, sulle coniche in Fisica:
si può osservare (e dimostrare) che
la figura d’interferenza ⇨, nel caso di due sorgenti d’onda puntiformi, è un’iperbole.
Guarda la bellissima animazione ⇨ !!! *(Ed Zobel, Zona Land)*