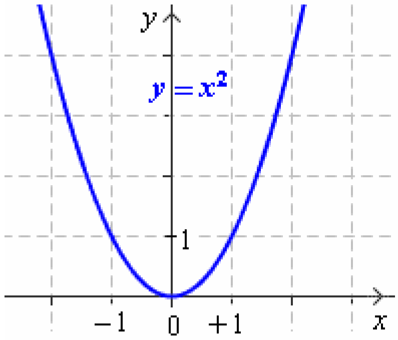
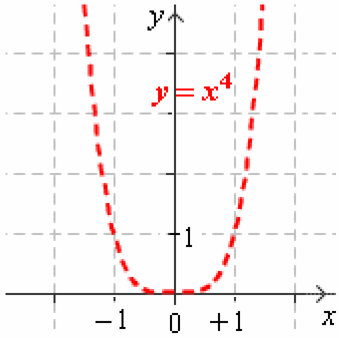
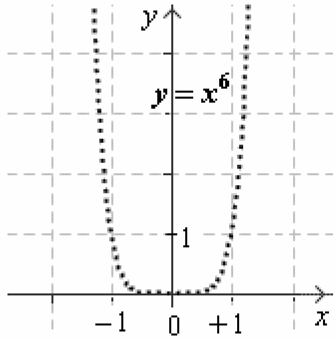
8. GRAFICI DI POTENZE E RADICI, e della funzione "VALORE ASSOLUTO" FUNZIONI PARI, DISPARI, NE' PARI NE' DISPARI







Nelle figure qui sopra riportate vediamo i grafici delle tre funzioni

$y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^6$.

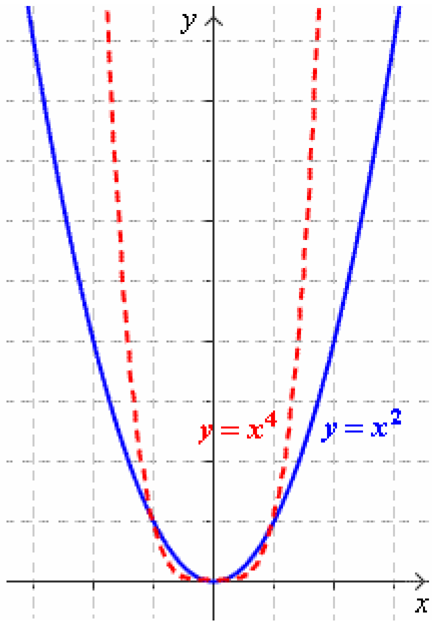
E' importante osservare un fatto piuttosto curioso:

♥ **quando è $-1 < x < 1$ e $x \neq 0$ $(0 < |x| < 1)$, si ha $x^6 < x^4 < x^2$.**

Ad esempio, con $x = \frac{1}{2}$, è $x^2 = \frac{1}{4}$, $x^4 = \frac{1}{16}$, $x^6 = \frac{1}{64}$.

Un numero compreso fra 0 e 1,
quando viene moltiplicato per sé stesso, diminuisce,
e se viene moltiplicato per sé stesso più volte,
produce un risultato che è tanto più piccolo
quanto più alto è il numero delle moltiplicazioni effettuate.

La figura qui a destra, ad esempio, confronta $y = x^2$ con $y = x^4$



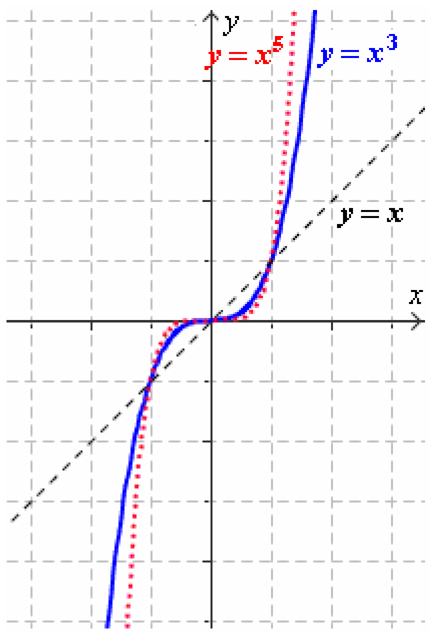
Le funzioni della forma $y = x^{2n}$,
ossia le potenze ad esponente pari,
sono caratterizzate dal fatto che, dando a x due valori opposti,
si ottiene il medesimo valore di y:
insomma, **per ogni x**, è $\boxed{f(-x) = f(x)}$.

Le funzioni dotate di questa proprietà sono dette "funzioni $\boxed{\text{PARI}}$".

Le funzioni pari sono tutte e sole quelle
il cui **grafico** è **simmetrico rispetto all'asse delle ordinate**.
Un altro esempio di funzione pari è $y = |x|$.

La figura qui a fianco mostra i grafici delle tre funzioni

$y = x$, $y = x^3$, $y = x^5$.



Le funzioni della forma $y = x^{2n+1}$,
ossia le potenze ad esponente dispari,
sono caratterizzate dal fatto che, dando a x due valori opposti,
si ottengono valori di y opposti:
insomma, **per ogni x**, è $\boxed{f(-x) = -f(x)}$.

Le funz. dotate di questa proprietà sono dette "funzioni $\boxed{\text{DISPARI}}$".

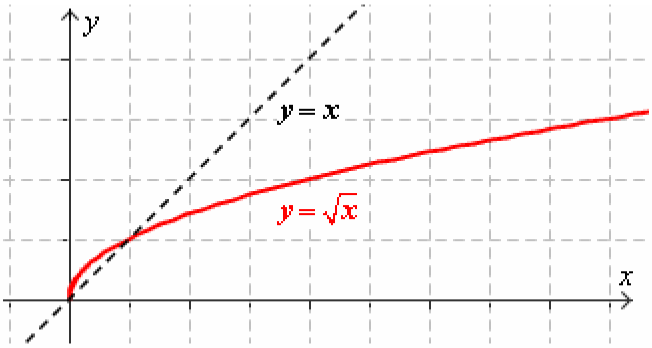
Le funzioni dispari sono tutte e sole quelle
il cui **grafico** è **simmetrico rispetto all'origine**.
Altri esempi di funzioni dispari: $y = 1/x$, $y = \sqrt[3]{x}$

Data una funzione $y = f(x)$, per stabilire se è PARI o DISPARI o NE' L'UNA NE' L'ALTRA COSA, si va a calcolare $f(-x)$ come negli esempi che seguono:

$f(x) = \frac{1}{x^4} - 3$ $\quad f(-x) = \frac{1}{(-x)^4} - 3 = \frac{1}{x^4} - 3 = f(x)$ *PARI*

$f(x) = x^3 + 2x$ $\quad f(-x) = (-x)^3 + 2(-x) = -x^3 - 2x = -(x^3 + 2x) = -f(x)$ *DISPARI*

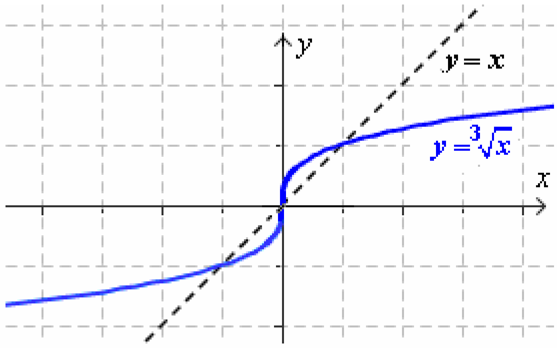
$f(x) = x^2 + x$ $\quad f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x \neq f(x)$ *e* $\neq -f(x)$ *NE' PARI NE' DISPARI*



Ecco il grafico della funzione $\boldsymbol{y=\sqrt{x}}$,
che è definita solo per $x \ge 0$.

E' notevole il comportamento
fra l'ascissa 0 e l'ascissa 1:
se $0<x<1$, è $\sqrt{x}>x$
Più in dettaglio: $0<x<1 \rightarrow 0<x<\sqrt{x}<1$

♥ **La radice quadrata di un numero compreso fra 0 e 1 è maggiore del numero stesso!**



Ed ecco il grafico della funzione $\boldsymbol{y=\sqrt[3]{x}}$,
il cui dominio è tutto $\mathbb{R}$.

Il grafico è simmetrico rispetto all'origine;
in effetti, in questo caso, la funzione è "dispari":
$f(-x)=-f(x)$.

Vale ancora quanto detto per la radice quadrata:
la radice cubica di un numero compreso fra 0 e 1 è maggiore del numero stesso.

Qui a fianco è rappresentata la funzione

$$\boldsymbol{y=\frac{1}{x^2}}$$

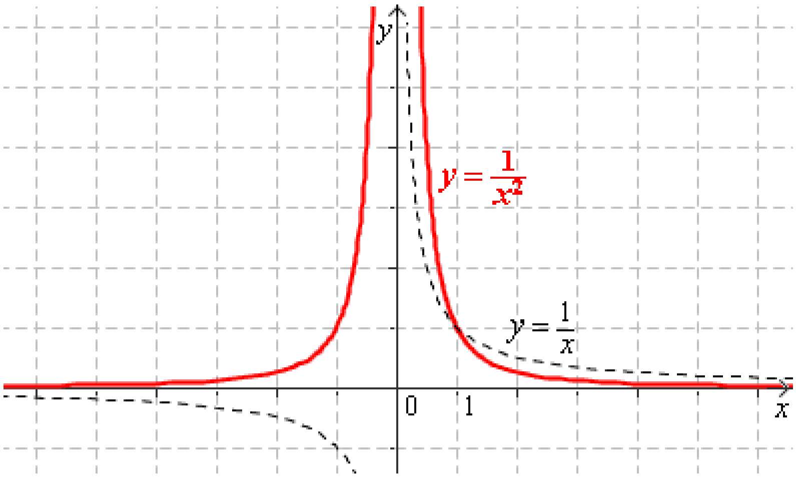
che abbiamo voluto confrontare
con la funzione tratteggiata $y=1/x$,
per evidenziare che:

quando è $x>1$

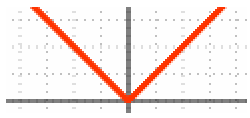
si ha $\dfrac{1}{x^2}<\dfrac{1}{x}$ (essendo $x^2>x$)

mentre quando è $0<x<1$

si ha $\dfrac{1}{x^2}>\dfrac{1}{x}$ (essendo $x^2<x$)



Ed ecco infine il grafico , dalla caratteristica forma a "V", della $\boldsymbol{y=|x|}$.
Si tratta di una funzione PARI perché $f(-x)=|-x|=|x|=f(x)$;
in effetti, il grafico è simmetrico rispetto all'asse y.



$\boldsymbol{y=|x|}$
In GeoGebra:
$\boldsymbol{y=abs(x)}$

♥ La funzione "**VALORE ASSOLUTO**"!!!

ESERCIZI

a) Utilizzando una macchinetta calcolatrice, compila la seguente tabella, finalizzata ad evidenziare che **quando un numero è compreso fra 0 e 1**,
- la sua radice quadrata, la sua radice cubica ecc. sono maggiori del numero stesso
- mentre il suo quadrato, il suo cubo ecc. sono minori del numero stesso

e invece **quando un numero è maggiore di 1**, avviene il viceversa.

$\sqrt[4]{a}$	$\sqrt[3]{a}$	$\sqrt{a}$	a	a^2	a^3	a^4
			0,5			
			2			

b) Fra le seguenti funzioni, stabilisci quali sono pari, quali dispari, quali né pari né dispari:

1) $y=x^3+\dfrac{1}{x}$ 2) $y=2x^2+1$ 3) $y=x^3+x^2$ 4) $y=2x^4+3|x|$ 5) $y=\sqrt[5]{x}+1$ 6) $y=\sqrt{x}$

c) Determina il valore dei seguenti limiti: 7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=$ 8) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=$ 9) $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{1}{x^2}=$ 10) $\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{1}{x^2}=$

11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=$ 12) $\lim\limits_{x\to0+}\sqrt{x}=$ 13) $\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{x-2}{x-1}=$ 14) $\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{x-2}{x-1}=$ 15) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x-1}=$

RISPOSTE 1 d 2 p 3 né… 4 p 5 né… 6 non ha senso chiederselo: il dominio non è simmetrico rispetto all'ascissa 0.
7 0^+ 8 0^+ 9 $+\infty$ 10 $+\infty$ 11 $+\infty$
12 0^+ 13 $-\infty$ 14 $+\infty$ 15 1