11. MANIPOLAZIONI DI GRAFICI

Partiamo dal grafico di una funzione fissata

$\boxed{y = f(x)}$.

Per meglio fissare le idee,
le nostre figure si riferiranno
sempre allo stesso esempio
di funzione di partenza:
abbiamo scelto la

$y = f(x) = x^2 - x$

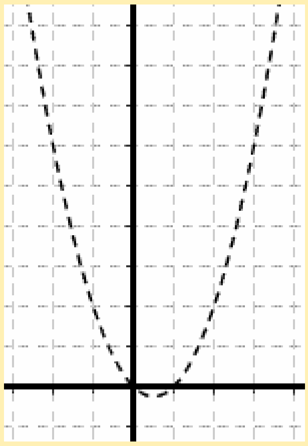
Vedremo come, semplicemente "manipolando"
il grafico della **funzione "madre"**,
è possibile ottenere i grafici
delle seguenti **funzioni "figlie"**
(essendo ***k*** una **costante positiva**):

$f(x)+k \quad f(x)-k \quad kf(x) \quad -f(x)$

$f(x+k) \quad f(x-k) \quad f(kx) \quad f(-x)$

$|f(x)| \quad f(|x|)$

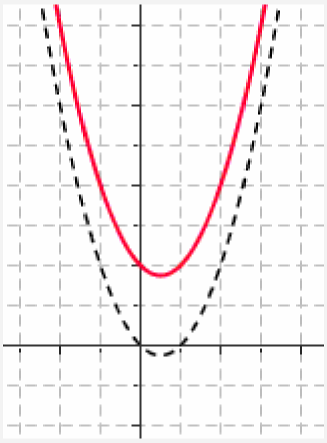
$[f(x)]^2 \quad \sqrt{f(x)} \quad \dfrac{1}{f(x)}$



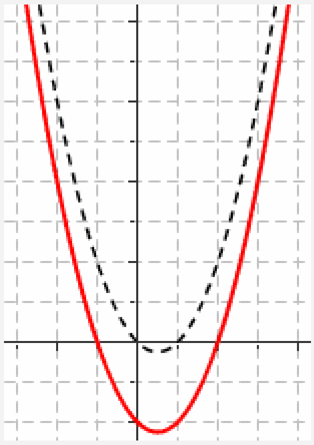
$\boxed{\begin{array}{c} \boldsymbol{y = f(x) = x^2 - x} \\ \textbf{\textit{funzione "madre"}} \end{array}}$

$\boxed{f(x) \to f(x) \pm k}$

traslazione
verticale
di k unità
verso l'alto se c'è il $+$,
verso il basso se c'è il $-$



$y = f(x) + 2 = x^2 - x + 2$

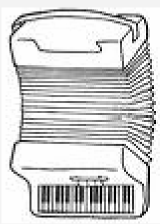


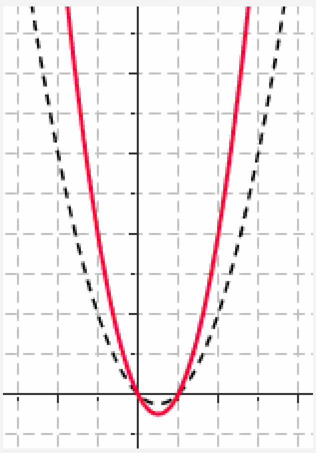
$y = f(x) - 2 = x^2 - x - 2$

$\boxed{f(x) \to kf(x)}$

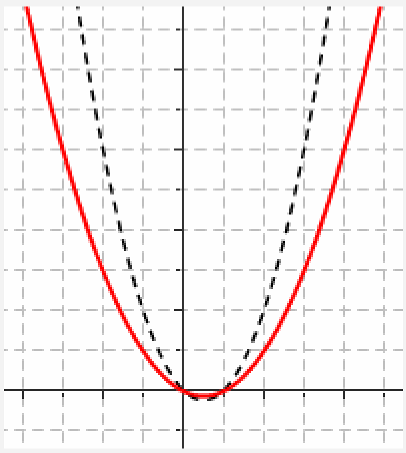
dilatazione
$(k > 1)$
o contrazione
$(0 < k < 1)$
in senso
verticale,
coi punti
sull'asse x
che rimangono
fermi:

"effetto
fisarmonica"
verticale.

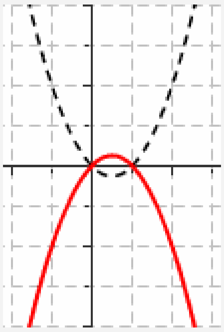




$y = 2f(x) = 2\left(x^2 - x\right)$



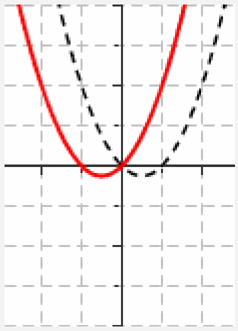
$y = \frac{1}{2} f(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - x\right) = \frac{x^2 - x}{2}$



$y = -f(x) = -\left(x^2 - x\right) = -x^2 + x$

$\boxed{f(x) \to -f(x)}$

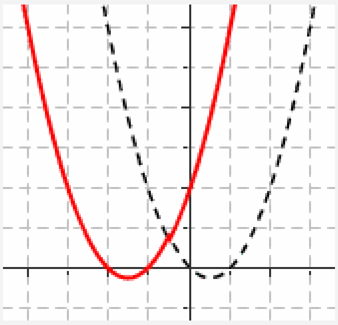
ribaltamento rispetto all'asse orizzontale



$y = f(-x) = (-x)^2 - (-x) = x^2 + x$

$\boxed{f(x) \to f(-x)}$

simmetrizzazione rispetto all'asse verticale



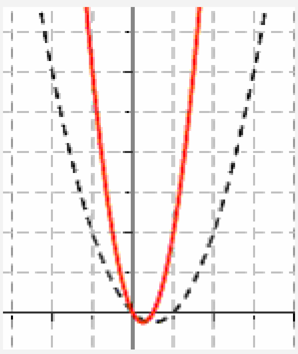
$y = f(x+2) = (x+2)^2 - (x+2)$

$y = f(x-2) = (x-2)^2 - (x-2)$

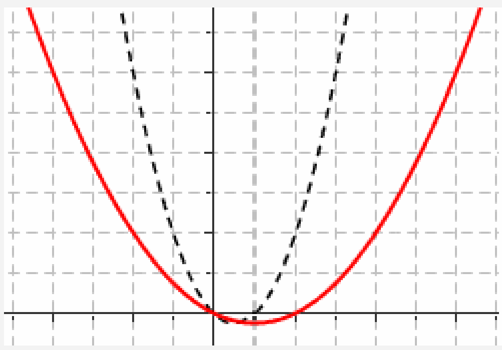
$\boxed{f(x) \to f(x \pm k)}$

traslazione orizzontale, con "EFFETTO BASTIAN CONTRARIO":
verso *sinistra* se c'è il $+$, verso *destra* se c'è il $-$

Perché mai questo "effetto bastian contrario"?
Consideriamo il caso della coppia $f(x)$ e $f(x+2)$, e riflettiamo.
Prendo la funzione $f(x)$, do un valore a x, ad es. $x=3$, e calcolo la y corrispondente:
ottengo un certo numero $y = f(3)$.
Ora, se voglio ottenere la stessa ordinata con l'altra funzione $f(x+2)$, che valore dovrò dare a x?
Dovrò dare a x il valore 1, in modo da avere $f(1+2) = f(3)$.
Quindi, la $f(x+2)$ assume gli stessi valori della $f(x)$, ma … 2 unità più a *sinistra*!!!



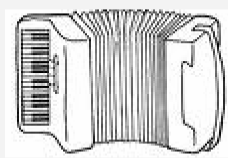
$y = f(2x) = (2x)^2 - 2x$

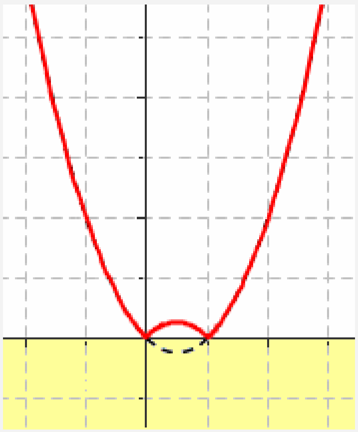


$y = f\left(\frac{1}{2}x\right) = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 - \frac{1}{2}x$

$\boxed{f(x) \to f(kx)}$

dilatazione o contrazione orizzontale, coi punti sull'asse y
che rimangono fermi: **"effetto fisarmonica" orizzontale**.
Attenzione, **anche qui c'è un "EFFETTO BASTIAN CONTRARIO":**
si ha una contrazione con $k>1$, una dilatazione con $0<k<1$.

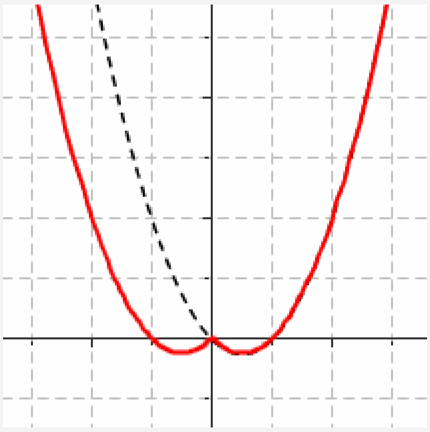




$$y = |f(x)| = |x^2 - x|$$

$$\boxed{f(x) \to |f(x)|}$$

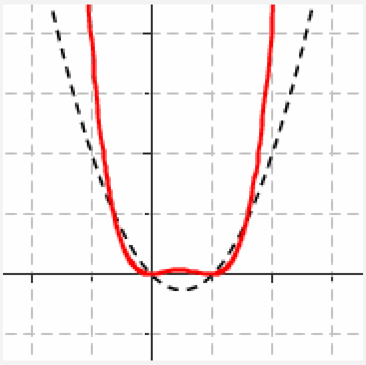
La parte del grafico della $f(x)$
che ha ordinate negative
viene sostituita
con la sua simmetrizzazione
rispetto all'asse orizzontale.



$$y = f(|x|) = |x|^2 - |x|$$

$$\boxed{f(x) \to f(|x|)}$$

La parte del grafico della $f(x)$
che ha ascisse negative
viene cancellata e buttata via.
La parte con ascisse positive viene riconfermata,
e completata con la sua simmetrica rispetto all'asse verticale.

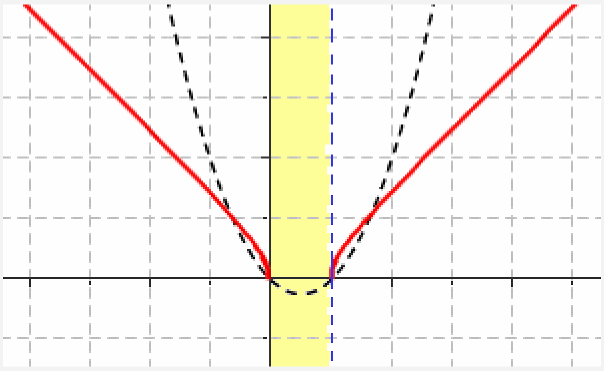


$$y = [f(x)]^2 = (x^2 - x)^2$$

$$\boxed{f(x) \to [f(x)]^2}$$

Per ogni ascissa,
l'ordinata corrispondente
viene elevata al quadrato.
Ora, occorre tener presente che
un numero compreso fra -1 e 1,
quando viene elevato alla seconda,
produce un numero positivo,
il cui valore assoluto
è MINORE
del valore assoluto
del numero di partenza.

Ad esempio,
elevando al quadrato
il numero 0,5
si ottiene 0,25
ed è 0,25<0,5.



$$y = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2 - x}$$

$$\boxed{f(x) \to \sqrt{f(x)}}$$

La parte del grafico con ordinate negative
viene buttata via.
Ciascun punto con ordinata positiva
viene sostituito da un punto
che ha ordinata uguale alla radice quadrata di quella iniziale
(mentre, naturalmente, l'ascissa rimane la stessa).
In particolare:
i punti di ordinata 0 e di ordinata 1 rimangono fissi;
se un punto ha ordinata maggiore di 1, si abbassa:

$$y > 1 \ \to \ \sqrt{y} < y$$

se un punto ha ordinata compresa fra 0 e 1,
si alza leggermente
(pur restando sempre al di sotto dell'ordinata 1):

$$0 < y < 1 \ \to \ 0 < y < \sqrt{y} < 1$$

$$\boxed{f(x) \to \frac{1}{f(x)}}$$

Per ogni ascissa, si prende
l'ordinata corrispondente
e se ne fa il reciproco.

Ma se un'ordinata è nulla,
il suo reciproco non esiste!
Quindi con $x=0$, $x=1$
(valori per cui si annulla il denominatore)
la funzione $y=\frac{1}{x^2-x}$ non esiste.

Inoltre, le ordinate vicine a 0,
quando se ne fa il reciproco,
si mutano in ordinate
molto grandi in valore assoluto .

Invece le ordinate molto grandi,
facendone il reciproco, si mutano
in ordinate molto piccole.

Le ordinate uguali a $+1$ oppure a -1,
quando se ne fa il reciproco, restano invariate.

$$y=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{x^2-x}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2-x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2-x}=-\infty$$

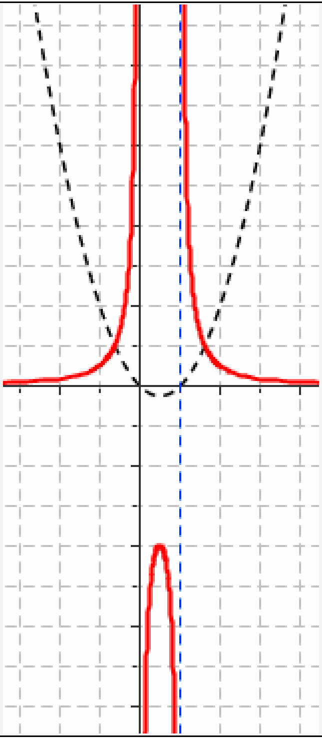
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x^2-x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x^2-x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x^2-x}=0^+$$

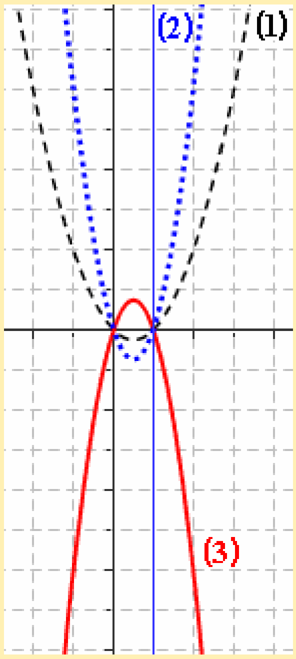
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x^2-x}=0^+$$

Le due rette verticali
$x=0$ *e* $x=1$,
e la retta orizzontale $y=0$,
sono dette "asintoti"
per la funzione



ALTRE MANIPOLAZIONI possono effettuarsi
SPEZZANDO IL PROCEDIMENTO GRAFICO IN PIÙ FASI.
Ad esempio, il passaggio dal grafico di $y=f(x)$ a quello di $y=-3f(x)$
può essere organizzato secondo le "tappe" (vedi figura qui a destra):

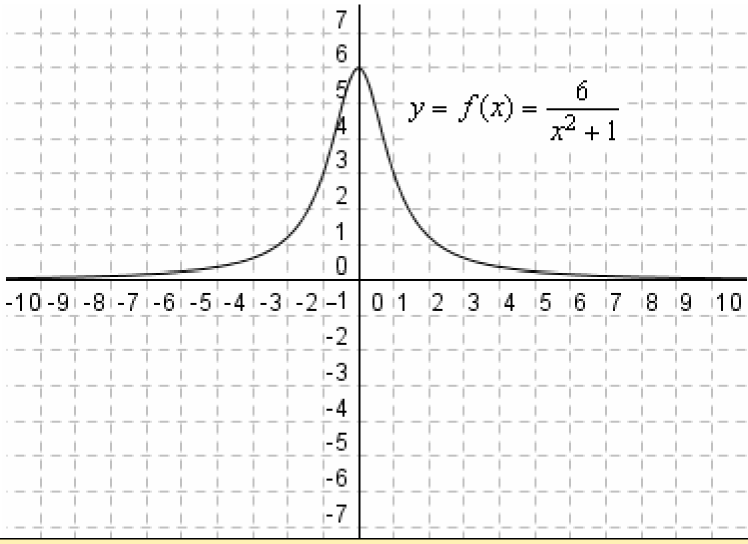
$$\underbrace{f(x)}_{(1)} \to \underbrace{3f(x)}_{(2)} \to \underbrace{-3f(x)}_{(3)}.$$



ESERCIZI (consigliabile però svolgere prima quelli alle pagine successive)
Clicca sulla freccia ⇨ per le correzioni degli esercizi di questa pagina

1) Dal grafico di $y=f(x)=\frac{6}{x^2+1}$, qui rappresentato, ricava i seguenti:

a) $1-f(x)$ b) $|f(x)-2|$ (fallo tratteggiato, questo!)



Risolvi prima graficamente, poi algebricamente, le seguenti equazioni:

2) $x^3+1=(x+1)^2$ 3) $\sqrt{x-1}+1=\sqrt{2x}$ 4) $x^2=\frac{1}{x+2}$

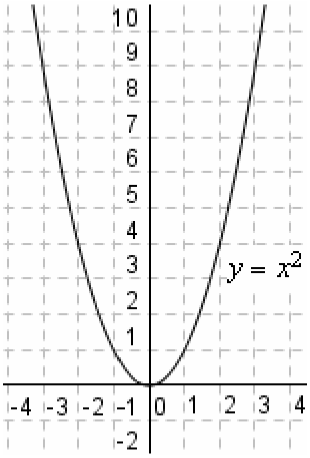
5) $-x/2=(x^2+1)^{-1}$ 6) $\sqrt[3]{4x}=x$ 7) $\sqrt{x}+3=x\sqrt{3}$

Per controllare la correttezza
dei grafici tracciati, puoi
servirti di **GEOGEBRA.**
Ma **occhio alle parentesi**!

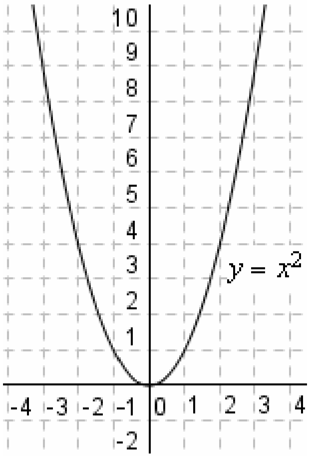
Ad es. $\frac{\sqrt[4]{x}}{2x^2+1}$
si scrive
$x\wedge(1/4)/(2x\wedge 2+1)$

8) Verifica che
l'equazione $|x-4|=\frac{1}{\sqrt{x}}$
ha tre soluzioni:
$0<x_1<1$,
$3<x_2<4$, $4<x_3<5$

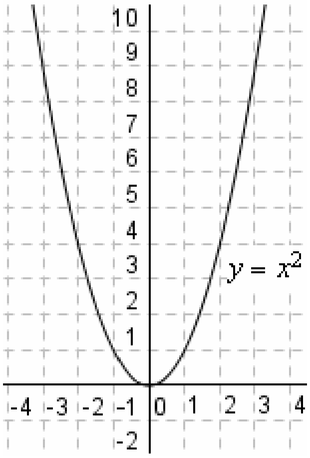
ESERCIZI: su ciascuna delle funzioni rappresentate, esegui le manipolazioni indicate.



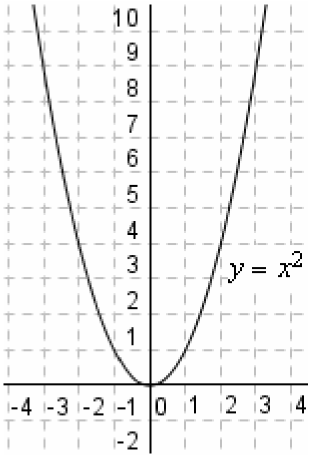
$f(x) \to f(x) - 1$



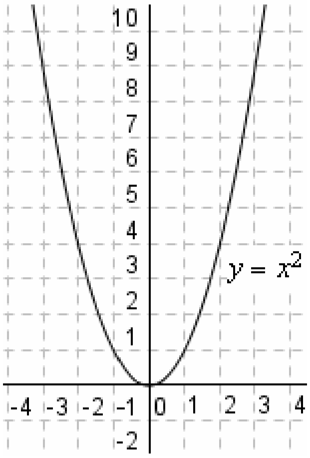
$f(x) \to f(x-1)$



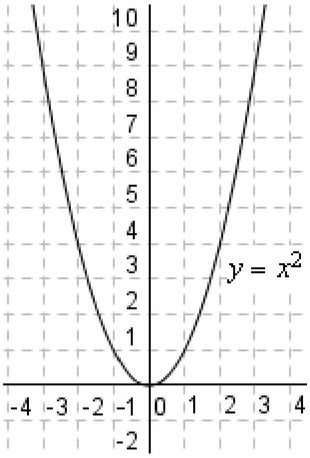
$f(x) \to 2f(x)$



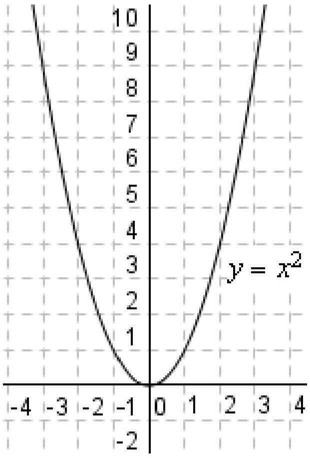
$f(x) \to f(2x)$



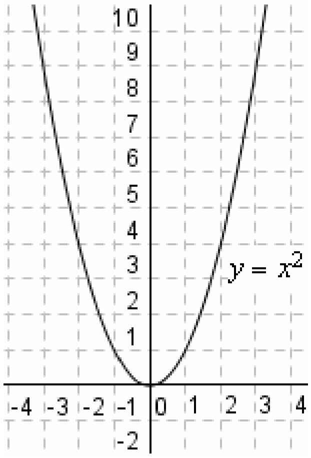
$f(x) \to \dfrac{1}{f(x)}$



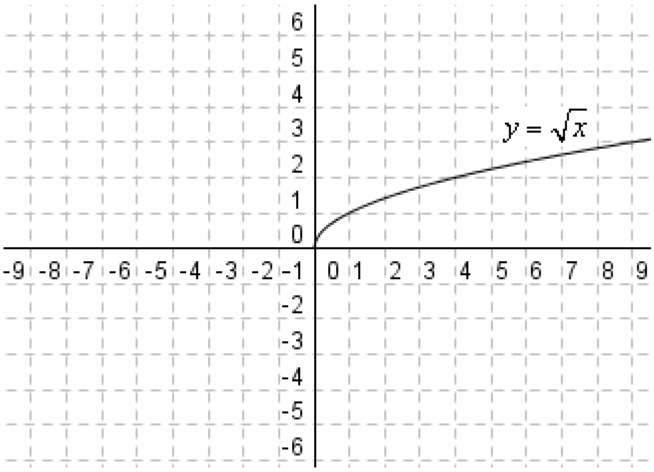
$f(x) \to \sqrt{f(x)}$



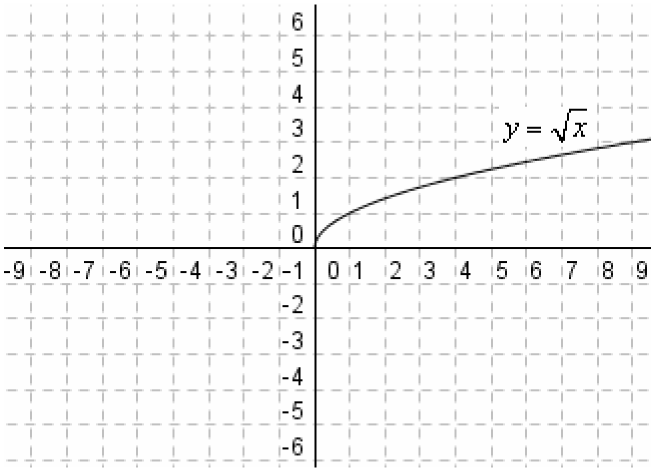
$f(x) \to [f(x)]^2$



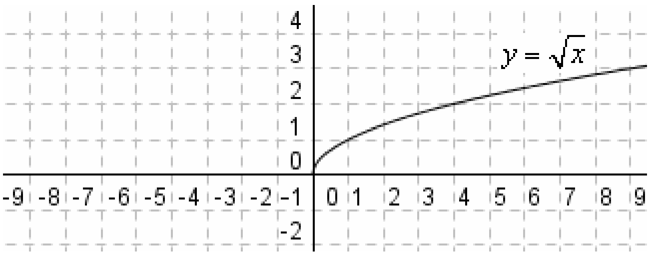
$f(x) \to f(x+2)$



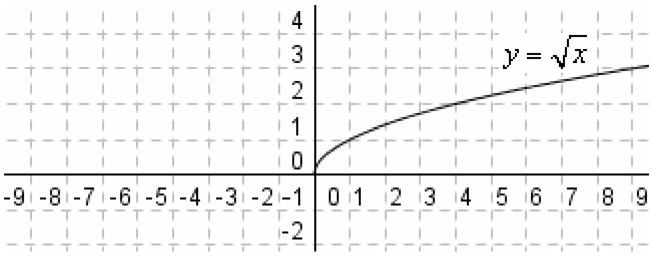
$f(x) \to f(x) + 3$ e $f(x) \to f(x+3)$



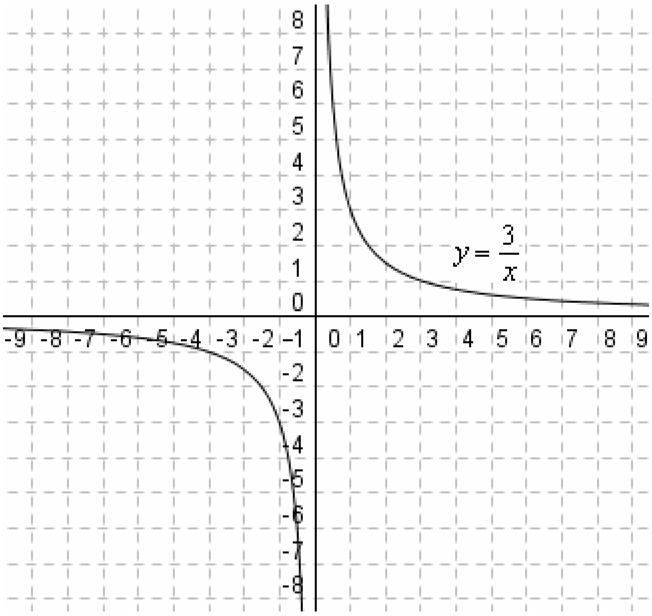
$f(x) \to -f(x)$ e $f(x) \to f(-x)$



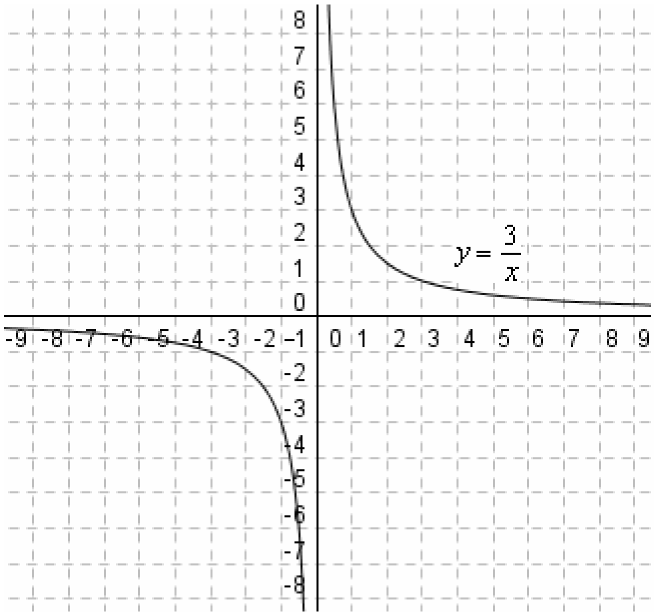
$f(x) \to \dfrac{1}{f(x)}$ e $f(x) \to f(x-1)$



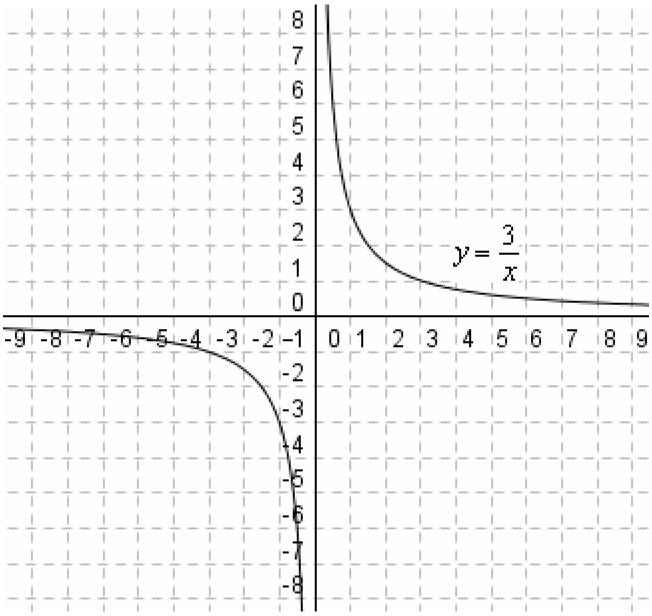
$f(x) \to \dfrac{1}{2} f(x)$ e $f(x) \to f\left(\dfrac{1}{2} x\right)$



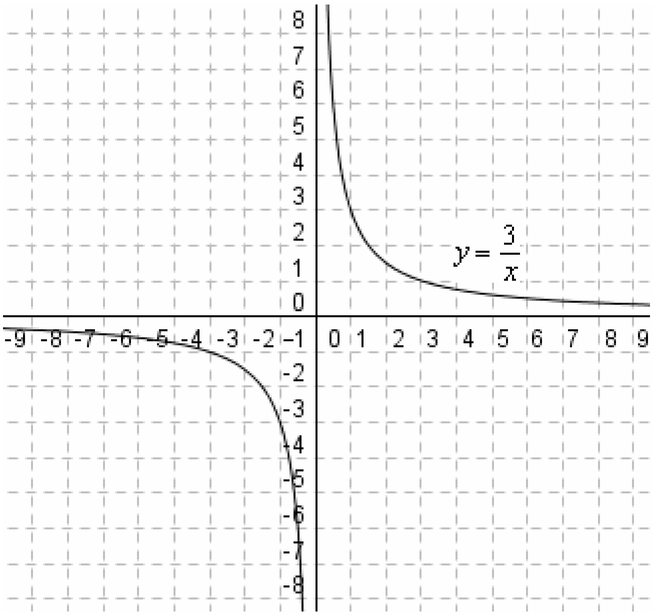
$f(x) \to f(x) - 1$ e $f(x) \to f(x) + 2$



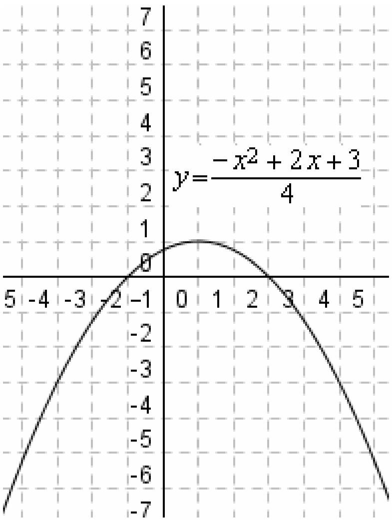
$f(x) \to f(x-1)$ e $f(x) \to f(x+2)$



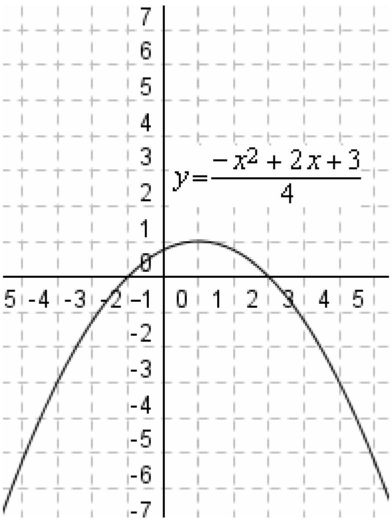
$f(x) \to \dfrac{1}{f(x)}$ e $f(x) \to [f(x)]^2$



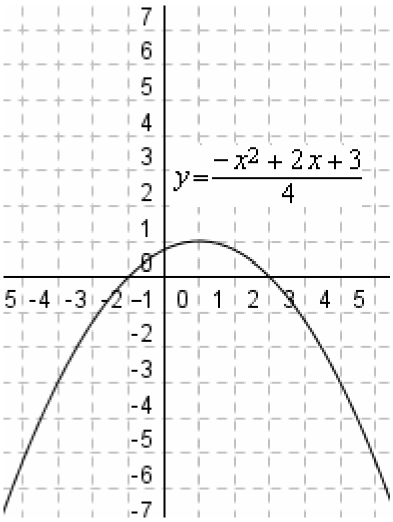
$f(x) \to |f(x)|$ e $f(x) \to \sqrt{f(x)}$



$f(x) \to |f(x)|$



$f(x) \to 1/f(x)$



$f(x) \to f(-x)$

CORREZIONI degli esercizi ⇨