SISTEMI DI GRADO SUPERIORE AL 1°

1. GRADO DI UN SISTEMA. METODI GENERALI DI RISOLUZIONE

Si dice "grado" di un sistema il prodotto fra i gradi delle sue equazioni.

- $\begin{cases} 4x^3+y^3=3 & (3°\,grado) \\ x^2-2x+y^2=0 & (2°\ grado) \end{cases} \rightarrow\ sistema\ di\ 6°\ grado$
- $\begin{cases} x-y=7 & (1°\ \ grado) \\ 2x+z=11 & (1°\ \ grado) \\ xz=-6 & (2°\ \ grado) \end{cases} \rightarrow\ sistema\ di\ 2°\ grado$

Va detto che a volte un sistema "appare" di grado n, mentre in realtà il "vero" grado è inferiore.

Ad esempio, il sistema seguente:

$$\begin{cases} x^2-y^2=48 \\ x+y=12 \end{cases}$$

appare di 2° grado, ma un semplice passaggio mostra che è invece sostanzialmente di 1° grado.

$$\begin{cases} (x+y)(x-y)=48 \\ x+y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12(x-y)=48 \\ x+y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=4 \\ x+y=12 \end{cases}$$

La problematicità, dato un sistema, di stabilire a priori quale sia il suo grado effettivo, rende ardua l'enunciazione, per i sistemi, di un teorema analogo a quello che è, per le equazioni, il "Teorema Fondamentale dell'Algebra".

E' possibile, comunque, affermare che
un sistema di grado n non può avere più di n soluzioni
(eccettuati i casi in cui il sistema risulti indeterminato).
E' chiaro che questo discorso sul "grado" si può riferire esclusivamente a quei sistemi nei quali le equazioni in gioco sono tutte algebriche (ossia, della forma "polinomio = 0").

♥ Importante tener presente che,
quando si dice "**SOLUZIONE**" con riferimento a un sistema, si intende:
- una **COPPIA ORDINATA** di numeri, **se il sistema ha due incognite**;
- una **TERNA ORDINATA** di numeri, **se il sistema ha tre incognite**;
- ecc.

Il metodo più generale per la risoluzione di un sistema è quello di **sostituzione**;
è possibile comunque applicare anche "**riduzione**",
ossia rimpiazzare un'equazione, quando lo si ritenga conveniente,
con una **combinazione lineare** (NOTA) dell'equazione stessa con una o più fra le altre.

NOTA: "combinazione lineare" di due o più oggetti matematici (equazioni, vettori, …)
è ciò che si ottiene sommandoli algebricamente,
dopo aver eventualmente moltiplicato ciascuno di essi per una costante numerica.

Vedremo ora un paio di ESEMPI.

Comunque, lo vuoi un **CONSIGLIO DA AMICO**? **DAVVERO UTILISSIMO**?
ALLA FINE della risoluzione di un sistema, **FAI SEMPRE LA VERIFICA**,
sostituendo, nel sistema iniziale, al posto delle singole incognite,
i valori rispettivamente trovati, per controllare se TUTTE le uguaglianze sono esatte.
Metodo comodo, rapido, efficace
per essere certi di aver fatto giusto, o per scoprire che c'è l'errore!!!

1) $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x=3y+1; \quad x=\dfrac{3y+1}{2} \\ \left(\dfrac{3y+1}{2}\right)^2-y^2=3; \quad \dfrac{9y^2+6y+1}{4}-y^2=3; \quad 9y^2+6y+1-4y^2=12 \end{cases}$

$$\begin{cases} x=\dfrac{3y+1}{2} \\ 5y^2+6y-11=0; \quad y_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+55}}{5}=\dfrac{-3\pm\sqrt{64}}{5}=\dfrac{-3\pm 8}{5}=\left\langle\begin{array}{l} -\dfrac{11}{5} \\ 1 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=1 \\ x=\dfrac{3y+1}{2}=\dfrac{3+1}{2}=2 \end{cases} \vee \begin{cases} y=-\dfrac{11}{5} \\ x=\dfrac{3\left(-\dfrac{11}{5}\right)+1}{2}=\dfrac{-\dfrac{33}{5}+1}{2}=-\dfrac{28}{5}\cdot\dfrac{1}{2}=-\dfrac{14}{5} \end{cases}$$

Il sistema assegnato, che era di 2° grado, ammette dunque le 2 soluzioni: $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ e $\begin{cases} x=-14/5 \\ y=-11/5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x^2+y^2=11 \\ xy=-3 \end{cases}$ $\begin{cases} y=-\dfrac{3}{x} \quad (x\neq 0) \\ 2x^2+\left(-\dfrac{3}{x}\right)^2=11; \quad 2x^2+\dfrac{9}{x^2}=11; \quad 2x^4+9=11x^2; \quad 2x^4-11x^2+9=0; \end{cases}$

Il passaggio in cui si isola y è effettuabile solo supponendo $x \neq 0$; d'altra parte, una coppia (x, y) con $x=0$ non potrebbe verificare la condizione $xy=-3$ quindi non potrebbe essere soluz. del sistema

$$\begin{cases} y=-\dfrac{3}{x} \\ \left(x^2\right)_{1,2}=\dfrac{11\pm\sqrt{121-72}}{4}=\dfrac{11\pm\sqrt{49}}{4}=\dfrac{11\pm 7}{4}=\left\langle\begin{array}{l} 1 \\ \dfrac{9}{2} \end{array}\right. \begin{array}{l} x^2=1 \rightarrow x=\pm 1 \\ x^2=\dfrac{9}{2} \rightarrow x=\pm\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \end{array} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-\dfrac{3}{x}=-\dfrac{3}{1}=-3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=-\dfrac{3}{x}=-\dfrac{3}{-1}=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{3}{\sqrt{2}} \\ y=-\dfrac{3}{x}=-\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\dfrac{3}{\sqrt{2}} \\ y=-\dfrac{3}{x}=\sqrt{2} \end{cases}$$

ESERCIZI (sistemi di grado superiore al 1°) Vai alle correzioni dei n. 3, 4, 9, 12, 14 ⇨

3) $\begin{cases} 3x-y=8 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} 2x+3y=10 \\ xy+4=0 \end{cases}$ **5)** $\begin{cases} x+y=0 \\ 2x^2+y^2=27 \end{cases}$ **6)** $\begin{cases} y+1=2x \\ x^2-y+3=0 \end{cases}$ **7)** $\begin{cases} y^2+x+y=88 \\ 5x-y=0 \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dfrac{x}{3}=\dfrac{x+y}{5} \\ (x-1)(x+1)=14-xy \end{cases}$ **9)** $\begin{cases} x^2+y^2-6x-2y=0 \\ x^2+y^2-8x-4y+16=0 \end{cases}$ (sottrarre innanzitutto membro a membro) **10)** $\begin{cases} x+2y+x^2+y^2=5 \\ 2x+y-x^2-y^2=1 \end{cases}$

11) $\begin{cases} 2x^2+2y^2=1 \\ x^2+y^2+2x-y=1 \end{cases}$ **12)** $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+xy=a(2a-1) \end{cases}$ **13)** $\begin{cases} x^2-y^2=4k \\ x+y=2k \end{cases}$ **14)** $\begin{cases} bx+ay=2ab \\ x^2+y^2=a^2+b^2 \end{cases}$

SOLUZIONI

3) $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases} \begin{cases} x=\dfrac{9}{5} \\ y=-\dfrac{13}{5} \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases} \begin{cases} x=6 \\ y=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$ **5)** $\begin{cases} x=\pm 3 \\ y=\mp 3 \end{cases}$ **6)** Imp. (in $\mathbb{R}$)

7) $\begin{cases} x=-2 \\ y=-10 \end{cases} \begin{cases} x=44/25 \\ y=44/5 \end{cases}$ **8)** $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases}$ **9)** $\begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases} \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$ **10)** $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \begin{cases} x=3/2 \\ y=1/2 \end{cases}$

11) $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{10} \\ y=-\dfrac{7}{10} \end{cases} \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ **12)** $\begin{cases} x=a \\ y=a-1 \end{cases} \begin{cases} x=\dfrac{1-2a}{2} \\ y=-\dfrac{1+2a}{2} \end{cases}$ **13)** $\begin{cases} x=k+1 \\ y=k-1 \end{cases}$ **14)** $\begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases} \begin{cases} x=\dfrac{a\left(3b^2-a^2\right)}{a^2+b^2} \\ y=\dfrac{b\left(3a^2-b^2\right)}{a^2+b^2} \end{cases}$