## 2. SISTEMI SIMMETRICI

**Un sistema della forma**

$$\boxed{\begin{cases} x+y=s \\ xy=p \end{cases}}$$

**vien detto SISTEMA SIMMETRICO FONDAMENTALE.**

Eccone un esempio:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-1 \end{cases}$$

Si potrebbe tranquillamente risolvere per sostituzione;
tuttavia, si osserva che
**il sistema richiede di trovare due numeri conoscendone la somma e il prodotto** ($s=2,\ p=-1$),
**per cui, volendo, si può anche scegliere di determinare i due numeri in gioco impostando** (vedi pag. 61)
**l'equazione ausiliaria**

$$\boxed{t^2-st+p=0} \quad \text{(nella fattispecie, } t^2-2t-1=0\text{)}$$

**e risolvendola.**
**Le due soluzioni che si troveranno saranno, appunto, i due numeri cercati.**

Nel nostro caso avremo

$$t^2-2t-1=0$$
$$t_{1,2}=1\pm\sqrt{1+1}=1\pm\sqrt{2}$$

quindi le soluzioni del sistema saranno

$$\begin{cases} x=1-\sqrt{2} \\ y=1+\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=1+\sqrt{2} \\ y=1-\sqrt{2} \end{cases} \quad \text{(con scrittura compatta: } \begin{cases} x=1\pm\sqrt{2} \\ y=1\mp\sqrt{2} \end{cases}\text{)}$$

Osservazione: il sistema è "simmetrico", nel senso che in esso $x$ e $y$ sono "intercambiabili".

**Un sistema di 2 equazioni in 2 incognite si dice "simmetrico"**
**ogniqualvolta si constati che il sistema resta invariato, se si scambia formalmente la *x* con la *y***
**( = se si rimpiazza ovunque *x* con *y* e *y* a sua volta con *x*).**

Facciamo un altro esempio di sistema simmetrico. Prendiamo il sistema seguente:

$$\begin{cases} 3x^2-7xy+3y^2=\dfrac{1}{4} \\ 2x+2y=3 \end{cases}$$

Se andiamo a scambiare formalmente $x$ con $y$ ($x \rightleftarrows y$)
il sistema si muta in

$$\begin{cases} 3y^2-7yx+3x^2=\dfrac{1}{4} \\ 2y+2x=3 \end{cases}$$

che coincide ancora col sistema di partenza!

E' evidente che, se un sistema simmetrico ammette una data soluzione
$x=\alpha,\ \ y=\beta$
allora necessariamente ammetterà anche la soluzione "gemella"
$x=\beta,\ \ y=\alpha$ .

Altre tipologie di sistemi simmetrici "notevoli" sono illustrate dagli esempi seguenti.
Per ciascuna tipologia, viene presentata una tecnica di risoluzione specifica,
che risulta più rapida rispetto al (pur sempre applicabile) metodo di sostituzione.

**1)** $\begin{cases} x+y=5 \\ x^2+y^2=17 \end{cases}$ *(trovare due numeri conoscendo la loro somma, e la somma dei loro quadrati)*

$\begin{cases} x+y=5 \\ (x+y)^2-2xy=17 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=5 \\ 5^2-2xy=17 \end{cases}$ $\begin{cases} \boxed{x+y=5} \\ 25-2xy=17;\ \ -2xy=-8;\ \ \boxed{xy=4} \end{cases}$

*Dunque, applicando la più semplice fra le cosiddette "formule di Waring" (pag.* 65*),*
*ci siamo ricondotti al sistema simmetrico fondamentale*

$\begin{cases} x+y=5 \\ xy=4 \end{cases}$

*che possiamo risolvere ad esempio con la tecnica appresa dell'equazione ausiliaria,*
*oppure, data la semplicità dei numeri in gioco, anche "a mente":*

$\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases} \vee \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$

**2)** $\begin{cases} xy=60 \\ x^2+y^2=169 \end{cases}$ *(trovare due numeri conoscendo il loro prodotto, e la somma dei loro quadrati)*

$\begin{cases} xy=60 \\ (x+y)^2-2xy=169 \end{cases}$ $\begin{cases} xy=60 \\ (x+y)^2-120=169;\ \ (x+y)^2=289;\ \ x+y=\pm 17 \end{cases}$

*Ci siamo ricondotti dunque alla coppia di sistemi simmetrici fondamentali*

$\begin{cases} xy=60 \\ x+y=17 \end{cases}$ ; $\begin{cases} xy=60 \\ x+y=-17 \end{cases}$

*che possiamo risolvere con la tecnica specifica, o anche "a mente", ottenendo*

$\begin{cases} x=5 \\ y=12 \end{cases}$, $\begin{cases} x=12 \\ y=5 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-5 \\ y=-12 \end{cases}$, $\begin{cases} x=-12 \\ y=-5 \end{cases}$

**ESERCIZI (sistemi simmetrici)** Vai alle correzioni dei n. 5, 9, 11, 13, 15, 16 ⇨

**3)** $\begin{cases} x+y=15 \\ x^2+y^2=153 \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} x^2+y^2=80 \\ x+y=-4 \end{cases}$ **5)** $\begin{cases} x+y=\frac{1}{6} \\ x^2+y^2=\frac{13}{36} \end{cases}$ **6)** $\begin{cases} x+y=4 \\ x^2+y^2=6 \end{cases}$ **7)** $\begin{cases} x+y=2\left(2\sqrt{2}-1\right) \\ x^2+y^2=4\left(6-\sqrt{2}\right) \end{cases}$

**8)** $\begin{cases} xy=48 \\ x^2+y^2=580 \end{cases}$ **9)** $\begin{cases} xy=16 \\ x^2+y^2=32 \end{cases}$ **10)** $\begin{cases} 4xy+1=0 \\ 2x^2+2y^2=1 \end{cases}$ **11)** $\begin{cases} xy=3 \\ x^2+y^2=14 \end{cases}$ **12)** $\begin{cases} x^2+y^2=\frac{17}{64} \\ xy+\frac{1}{16}=0 \end{cases}$

**13)** $\begin{cases} x+y=2a \\ x^2+y^2=2\left(a^2+b^2\right) \end{cases}$ **14)** $\begin{cases} xy=a-1 \\ x^2+y^2=a^2-2a+2 \end{cases}$ **15)** $\begin{cases} x^3+y^3=14 \\ x+y=2 \end{cases}$ (formule di Waring, pag. 65 …) **16)** $\begin{cases} x^3+y^3=\frac{1}{4} \\ x+y=1 \end{cases}$

**SOLUZIONI**

**3)** $\begin{cases} x=12 \\ y=3 \end{cases} \begin{cases} x=3 \\ y=12 \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} x=-8 \\ y=4 \end{cases} \begin{cases} x=4 \\ y=-8 \end{cases}$ **5)** $\begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases}$ **6)** imp. (in $\mathbb{R}$) **7)** $\begin{cases} x=3\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2}-2 \end{cases} \begin{cases} x=\sqrt{2}-2 \\ y=3\sqrt{2} \end{cases}$

**8)** $\begin{cases} x=2 \\ y=24 \end{cases} \begin{cases} x=24 \\ y=2 \end{cases} \begin{cases} x=-2 \\ y=-24 \end{cases} \begin{cases} x=-24 \\ y=-2 \end{cases}$ **9)** $\begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases} \begin{cases} x=-4 \\ y=-4 \end{cases}$ **10)** $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases} \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$

**11)** $\begin{cases} x=\sqrt{5}+\sqrt{2} \\ y=\sqrt{5}-\sqrt{2} \end{cases} \begin{cases} x=\sqrt{5}-\sqrt{2} \\ y=\sqrt{5}+\sqrt{2} \end{cases} \begin{cases} x=-\sqrt{5}-\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{5}+\sqrt{2} \end{cases} \begin{cases} x=-\sqrt{5}+\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{5}-\sqrt{2} \end{cases}$ **12)** $\begin{cases} x=-\frac{1}{8} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{8} \end{cases} \begin{cases} x=\frac{1}{8} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases} \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{8} \end{cases}$

**13)** $\begin{cases} x=a\pm b \\ y=a\mp b \end{cases}$ **14)** $\begin{cases} x=1 \\ y=a-1 \end{cases} \begin{cases} x=a-1 \\ y=1 \end{cases} \begin{cases} x=1-a \\ y=-1 \end{cases} \begin{cases} x=-1 \\ y=1-a \end{cases}$ **15)** $\begin{cases} x=1-\sqrt{2} \\ y=1+\sqrt{2} \end{cases} \begin{cases} x=1+\sqrt{2} \\ y=1-\sqrt{2} \end{cases}$ **16)** $\begin{cases} x=1/2 \\ y=1/2 \end{cases}$