

14. DISEQUAZIONI FRATTE

Si risolvono come le disequazioni di grado superiore al secondo. Vale a dire:

A) SI PORTA TUTTO A 1° MEMBRO, IN MODO CHE IL 2° MEMBRO SIA 0

(si dovrà avere, in definitiva, un'unica frazione, confrontata con lo 0)

B) poi SI SCOMPONGONO IN FATTORI SIA IL NUMERATORE. CHE IL DENOMINATORE
(ciascun fattore dovrà essere di 1° grado, oppure di 2° grado, oppure di tipo "particolare": vedi es. 5)

C) quindi SI STUDIA IL SEGNO DI CIASCUN FATTORE IN GIOCO (NOTA)

NOTA. Sarebbe **gravissimo errore** mandar via il denominatore! Infatti

ciò equivarrebbe a moltiplicare per il denominatore entrambi i membri, ma in una disequazione è lecito moltiplicare per un'espressione contenente x soltanto se questa è sempre > 0 , $\forall x$

D) e infine SI TRACCIA UNO SCHEMA PER IL CONFRONTO DEI SEGNI
per trarre, dall'osservazione di questo, le conclusioni opportune.

Esempio 1:

$$x \cdot \frac{2x-7}{x^2-4} < \frac{2}{x+2}$$

$$\frac{2x^2-7x}{x^2-4} - \frac{2}{x+2} < 0 ; \frac{2x^2-7x}{(x+2)(x-2)} - \frac{2}{x+2} < 0 ; \frac{2x^2-7x-2x+4}{(x+2)(x-2)} < 0$$

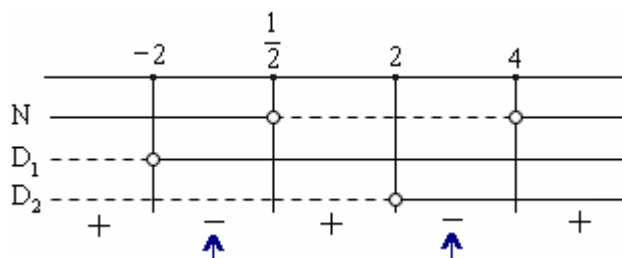
$$\frac{N}{D_1 D_2} < 0$$

$$\frac{2x^2-9x+4}{(x+2)(x-2)} < 0$$

$$N > 0 \quad 2x^2-9x+4 > 0 \quad x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-32}}{4} = \frac{9 \pm 7}{4} = \left\langle \frac{1}{2} \right\rangle \quad \boxed{x < \frac{1}{2} \vee x > 4}$$

$$D_1 > 0 \quad x+2 > 0 \quad \boxed{x > -2}$$

$$D_2 > 0 \quad x-2 > 0 \quad \boxed{x > 2}$$



SOLUZIONI: $\boxed{-2 < x < \frac{1}{2} \vee 2 < x < 4}$

LINEA CONTINUA	—	FATTORE POSITIVO
PALLINO VUOTO	○	FATTORE NULLO
LINEA TRATTEGGIATA	----	FATTORE NEGATIVO



Esempio 2:

(leggi il riquadro sottostante)

$$\frac{N}{D} \geq 0$$

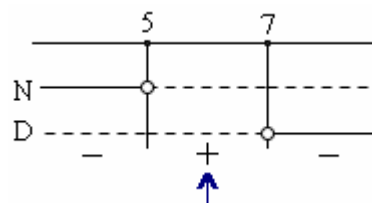
$$\frac{5-x}{x-7} \geq 0$$

NOTA
Volendo, si potrebbe riscrivere come

$$\frac{x-5}{x-7} \leq 0$$

$$N > 0 \quad 5-x > 0 \quad -x > -5 \quad \boxed{x < 5}$$

$$D > 0 \quad x-7 > 0 \quad \boxed{x > 7}$$



SOLUZIONI:

$$\boxed{5 \leq x < 7}$$

$$S = [5, 7)$$

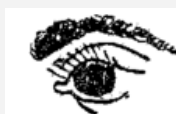
♥ Nel caso si abbia il \leq , oppure il \geq , conviene pensare **DAPPRIMA** alla disequazione **STRETTA** (quella solo col $>$ o col $<$), **POI** aggiungere alle soluzioni così trovate anche quei valori che rendono la frazione uguale a 0.

♥ Ricorda a proposito che una frazione si annulla quando si annulla il suo **NUMERATORE**, purché però non si annulli contemporaneamente anche il denominatore, nel qual caso la frazione non sarebbe nulla bensì indeterminata.

$$\frac{0}{a} = 0$$

$$\frac{a}{0} = \text{IMPOSSIBILE}$$

$$\frac{0}{0} = \text{INDETERMINATA}$$



Esempio 3:

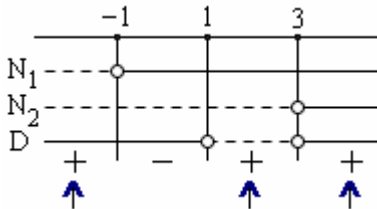
$$\frac{N_1 \quad N_2}{(x+1)^3(x-3)} \geq 0$$

$$\frac{D}{x^2-4x+3}$$

$N_1 > 0 \quad (x+1)^3 > 0 \quad x+1 > 0 \quad \boxed{x > -1}$

$N_2 > 0 \quad x-3 > 0 \quad \boxed{x > 3}$

$D > 0 \quad x^2 - 4x + 3 > 0 \quad x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1 = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases} \quad \boxed{x < 1 \vee x > 3}$



SOLUZIONI:

$\boxed{x \leq -1 \vee x > 1 \text{ ma } x \neq 3}$

La disequazione presenta il \geq .

La **disequazione "stretta"** ($>$) è verificata per $x < -1 \vee 1 < x < 3 \vee x > 3$.

L'**equazione** ($=$) è verificata soltanto con $x = -1$,

valore che annulla il numeratore senza annullare il denominatore; invece i valori $x = 1$ e $x = 3$ **NON** sono soluzioni dell'equazione:

- $x = 1$ non lo è perché annulla il denominatore (frazione impossibile);
- $x = 3$ non lo è perché, sebbene annulli il numeratore, annulla contemporaneamente anche il denominatore (frazione indeterminata).

Pertanto alle soluzioni della disequazione stretta andrà aggiunto il solo valore $x = -1$, e si otterrà in definitiva

$x \leq -1 \vee 1 < x < 3 \vee x > 3$ o anche: $\boxed{x \leq -1 \vee x > 1 \text{ ma } x \neq 3}$

OSSERVAZIONE

Risolviamo lo stesso esercizio diversamente, scomponendo il denominatore in due fattori di 1° grado:

$$\frac{(x+1)^3(x-3)}{(x-1)(x-3)} \geq 0$$

Fattorizzando il denominatore, si nota la **possibilità di semplificare**.

Semplificando, però, viene eliminata l'espressione $(x-3)$

che inizialmente compariva a denominatore, quindi bisogna ricordarsi di

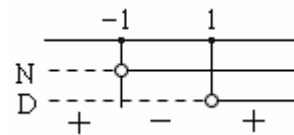
scrivere la condizione $x \neq 3$, che significa: "se alla fine fra le soluzioni trovate dovesse rientrare anche il valore $x = 3$, lo si dovrebbe escludere". Dunque:

$$\frac{N}{(x+1)^3(x-3)} \geq 0 \quad \boxed{x \neq 3}$$

$$\frac{D}{(x-1)(x-3)}$$

$N > 0 \quad (x+1)^3 > 0 \quad x+1 > 0 \quad \boxed{x > -1}$

$D > 0 \quad x-1 > 0 \quad \boxed{x > 1}$



Tenuto conto ora del verso (\geq) e della condizione $x \neq 3$, si hanno le **SOLUZIONI:**

$\boxed{x \leq -1 \vee x > 1 \text{ ma } x \neq 3}$

Esempio 4:

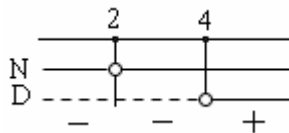
a) $\frac{(x-2)^2}{x-4} < 0$

b) $\frac{(x-2)^2}{x-4} > 0$

c) $\frac{(x-2)^2}{x-4} \leq 0$

d) $\frac{(x-2)^2}{x-4} \geq 0$

Lo schema finale è, in tutti e 4 i casi, il seguente:



... e le **SOLUZIONI** sono, rispettivamente:

a) $\boxed{x < 4 \text{ ma } x \neq 2}$

b) $\boxed{x > 4}$

c) $\boxed{x < 4}$

d) $\boxed{x > 4 \vee x = 2}$

Esempio 5:

$$\frac{N}{(x-2)^4} \leq 0$$

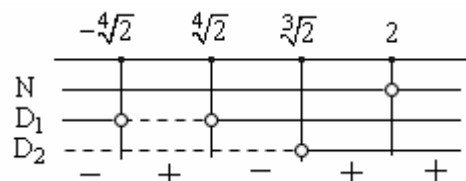
$$\frac{D_1 \quad D_2}{(x^4-2)(x^3-2)}$$

In questo caso i fattori in gioco non sono né di 1°, né di 2° grado; sono però "**di tipo particolare**", nel senso che, per ciascun fattore, se ne può agevolmente studiare il segno, mediante la disequazione ausiliaria $fattore > 0$, senza ricorrere ad una ... scomposizione del fattore in altri fattori di grado inferiore.

$N > 0 \quad (x-2)^4 > 0 \quad x-2 \neq 0 \quad \boxed{x \neq 2}$

$D_1 > 0 \quad x^4 - 2 > 0 \quad x^4 > 2 \quad |x| > \sqrt[4]{2} \quad \boxed{x < -\sqrt[4]{2} \vee x > \sqrt[4]{2}}$

$D_2 > 0 \quad x^3 - 2 > 0 \quad x^3 > 2 \quad \boxed{x > \sqrt[3]{2}}$



SOL.: $\boxed{x < -\sqrt[4]{2} \vee \sqrt[4]{2} < x < \sqrt[3]{2} \vee x = 2}$