

## ESERCIZI SULLE DISEQUAZIONI FRATTE

1a) $\frac{x-1}{x-2} < 0$	1b) $\frac{x-1}{x-2} \leq 0$	2) $\frac{12x-4}{12x-6} \geq 0$	Può essere innanzitutto semplificata, dividendo per 4 e moltiplicando per 6: $\frac{3x-1}{2x-1} \geq 0$	
3) $\frac{3-x}{x-7} > 0$ o anche $\frac{x-3}{x-7} < 0 \Rightarrow$		4) $\frac{x-4}{8-x} \leq 0$ opp. $\frac{x-4}{x-8} \geq 0 \Rightarrow$		5) $\frac{5-x}{9-x} > 0$ opp. $\frac{x-5}{x-9} > 0 \Rightarrow$
6a) $\frac{x^2-9}{x-1} < 0$	6b) $\frac{x^2-9}{x-1} \leq 0$	7) $\frac{x^2-4x+3}{x^2-6x+8} > 0$	8) $\frac{x^2-7x+12}{x^2-6x+8} \geq 0$	9) $\frac{x^2-2x-1}{x^2-2} < 0$
10a) $\frac{(x-7)^2}{x-1} > 0$	10b) $\frac{(x-7)^2}{x-1} \geq 0$	10c) $\frac{x-1}{(x-7)^2} > 0$	10d) $\frac{x-1}{(x-7)^2} \geq 0$	11) $\frac{x^2-1}{3x^2-3x} \geq 0$
12) $\frac{x^3-x^2-9x+9}{x^3-2x^2} < 0$				
Qui INNANZITUTTO ( <b>PRIMO PASSAGGIO!</b> Vedi RIFLESSIONE a pag. 163) bisogna <b>SCOMPORRE</b> sia il <b>N</b> che il <b>D</b> in fattori ciascuno dei quali deve essere: o di <b>1° grado</b> , o di <b>2° grado</b> , oppure <b>"di tipo particolare"</b>				
13) $\frac{x^3-4x}{x^2-2} > 0$	14) $\frac{x^4-2x^3+4x^2}{x+2} > 0$	15) $\frac{x^3-9x^2+8x}{x^3-x^2-x+1} \leq 0$	16) $\frac{5x+15}{x^3+x^2+x+1} \leq 0$	
17) $\frac{7a+21}{a^2-9} < 0$	18) $\frac{3x^2}{6-x} \leq 0$	19) $\frac{3}{x^2-4x} > 0$	20) $\frac{x^2-4x+5}{4x-x^2} \leq 0$	21) $\frac{25-16d^4}{d^2+2d+1} > 0$
22) $\frac{6}{2x-1} > \frac{5}{x-2}$	Porta a 1° m., fai il denom. comune!		23) $\frac{x^3+2}{x} \geq 2x+1$	24) $\frac{1}{2x-2} + \frac{3}{x^2-1} \leq \frac{1}{4}$
Nelle seguenti N e D sono GIA' "di tipo particolare"				
26) $\frac{x^4-2}{x^3-2} > 0$	27) $\frac{x^4+2}{x^3+2} > 0$	28) $\frac{(x+3)^4}{x^3+8} < 0$	29) $\frac{(x+2)^3}{x^4} \geq 0$	
Qui occorre prima scomporre				
30) $\frac{x^5-x}{x^4-81} > 0$	31) $\frac{x^6-x^3-2}{x^8+15x^4-16} \geq 0$	32) $\frac{a^8-1}{a^3-a^2-3a+3} < 0$		
33) $\frac{x^2(3x+2)(x^3-2)}{3-4x} < 0$	34) $\frac{12x^4-19x^2+4}{4x^2+4x-3} \leq 0$	35) $\frac{z^3-3z^2+z+5}{16z^4+40z^3+25z^2} \leq 0$	36) $\frac{x-4}{x^2+3} < 0$	

## SOLUZIONI

- 1a)  $1 < x < 2$    1b)  $1 \leq x < 2$    2)  $x \leq 1/3 \vee x > 1/2$    3)  $3 < x < 7$    4)  $x \leq 4 \vee x > 8$    5)  $x < 5 \vee x > 9$   
 6a)  $x < -3 \vee 1 < x < 3$    6b)  $x \leq -3 \vee 1 < x \leq 3$    7)  $x < 1 \vee 2 < x < 3 \vee x > 4$    8)  $x < 2 \vee x \geq 3$  ma  $x \neq 4$   
 9)  $-\sqrt{2} < x < 1 - \sqrt{2} \vee \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$    10a)  $x > 1$  ma  $x \neq 7$    10b)  $x > 1$    10c)  $x > 1$  ma  $x \neq 7$   
 10d)  $x \geq 1$  ma  $x \neq 7$    11)  $x \leq -1 \vee x > 0$  ma  $x \neq 1$    12)  $-3 < x < 1$  ma  $x \neq 0 \vee 2 < x < 3$   
 13)  $-2 < x < -\sqrt{2} \vee 0 < x < \sqrt{2} \vee x > 2$    14)  $x > -2$  ma  $x \neq 0$    15)  $-1 < x \leq 0 \vee 1 < x \leq 8$   
 16)  $-3 \leq x < -1$    17)  $a < 3$  ma  $a \neq -3$    18)  $x > 6 \vee x = 0$   
 20)  $x < 0 \vee x > 4$    21)  $-\frac{\sqrt{5}}{2} < d < \frac{\sqrt{5}}{2}$  ma  $d \neq -1$    22)  $x < -\frac{7}{4} \vee \frac{1}{2} < x < 2$
- 19)  $x < 0 \vee x > 4 \Rightarrow$
- 23)  $x \leq -1 \vee 0 < x \leq 1 \vee x \geq 2$    24)  $x \leq -3 \vee -1 < x < 1 \vee x \geq 5$    25)  $b < -1 \vee b > 1$    26)  $-\sqrt[4]{2} < x < \sqrt[4]{2} \vee x > \sqrt[3]{2}$   
 27)  $x > -\sqrt[3]{2}$    28)  $x < -2$  ma  $x \neq -3$    29)  $x \geq -2$  ma  $x \neq 0$    30)  $-3 < x < -1 \vee 0 < x < 1 \vee x > 3$   
 31)  $x < 1$  ma  $x \neq -1 \vee x \geq \sqrt[3]{2}$    32)  $a < -\sqrt{3} \vee -1 < a < \sqrt{3}$  ma  $a \neq 1$    33)  $-\frac{2}{3} < x < \frac{3}{4}$  ma  $x \neq 0 \vee x > \sqrt[3]{2}$   
 34)  $-\frac{3}{2} < x \leq -\frac{2\sqrt{3}}{3} \vee -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$  ma  $x \neq \frac{1}{2}$    35)  $z \leq -1$  ma  $z \neq -\frac{5}{4}$
- 36)  $x < 4$  Qui eccezionalmente il D potrebbe andarsene, perché è  $> 0$  per ogni  $x!$   $\Rightarrow$

**ALTRI ESERCIZI SULLE DISEQUAZIONI FRATTE (soluzioni alla pagina seguente)**

- 1)  $\frac{x-8}{x+2} < 0$     2)  $\frac{4x-5}{2x-3} \leq 0$     3)  $\frac{4x-4}{3x-15} > 0$     4)  $\frac{x-5}{2} > 0$     5)  $\frac{x+1}{x+3} < 0$     6)  $\frac{x+1}{x+3} \leq 0$
- 7)  $\frac{5x+1}{4x+1} > 0$     8)  $\frac{5x+1}{4x+1} \geq 0$     9)  $\frac{2x}{x-4} < 0$     10)  $\frac{2x}{x-4} < 1$     11)  $\frac{1}{x+3} > 0$     12)  $\frac{3}{x-5} \leq 0$
- 13)  $\frac{1-2x}{2-x} < 0$     14)  $\frac{x}{5-x} \geq 0$     15)  $\frac{4-x}{x} \geq 2$     16)  $\frac{1}{x} \geq \frac{3}{2x}$     17)  $\frac{1}{7-x} < 0$     18)  $\frac{6}{7-x} < 3$
- 19)  $\frac{x^2-9x+20}{x^2-5x+6} < 0$     20)  $\frac{x^2-x-12}{x-1} \leq 0$     21)  $\frac{10x-5}{x^2-3x+2} > 0$     22)  $\frac{x^2-1}{x^2-4x+4} \geq 0$
- 23)  $\frac{x^2-9x+14}{x^2-15x+14} \geq 0$     24)  $\frac{x^2}{x^2-8x+15} \leq 0$     25)  $\frac{x^2+14}{x^2-6x+14} > 0$     26)  $\frac{x^2-14}{x^2-14x} \leq 0$
- 27)  $\frac{12x^2-7x+1}{3x^2-13x+4} < 0$     28)  $\frac{6x^2+5x-1}{x^2-4x-1} \geq 0$     29)  $\frac{x^2-2x}{x^2-2x+5} < 0$     30)  $\frac{x^2-6x+9}{x^2-3} > 0$
- 31)  $\frac{x^2-4x+5}{x^2-4x+3} < 0$     32)  $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4x+2} < 0$     33)  $\frac{49x^2+14x+1}{24x^2+10x+1} < 0$     34)  $\frac{x-4}{x^2-10x+16} \leq 0$
- 35)  $\frac{x^2-4x}{x^2-1} \geq 0$     36)  $\frac{x^2-4x+1}{2x^2} \geq 0$     37)  $\frac{x^2-x+2}{3x^2-12x} > 0$     38)  $\frac{x+4}{x^2+4} > 0$
- 39)  $\frac{8-2x-x^2}{8+2x-x^2} > 0$     40)  $\frac{x-x^2}{x^2-12x+35} > 0$     41)  $\frac{2(x+1)^2}{3(x^2+1)} \leq 0$     42)  $\frac{(x+3)^2}{x^2} > 0$
- 43)  $\frac{x^2-11x+30}{x-6} > 0$     44)  $\frac{x^2-x}{x^2+2x} < 0$     45)  $\frac{2x^2+6x+4}{x^2-2x+2} \leq 0$     46)  $\frac{6x-x^2-5}{x^2-2x\sqrt{2}+2} > 0$
- 47)  $\frac{1}{x} > x$     48)  $\frac{x^2+3x}{x^2+x-6} \leq 2$     49)  $\frac{x^2+x}{x-1} - 1 > 0$     50)  $\frac{1}{x-1} > \frac{1}{x-2}$
- 51)  $\frac{x^4-x^2}{x^4+x^2-6} > 0$     52)  $\frac{x^3-x^2-x+1}{x-2} \leq 0$     53)  $\frac{x^3-2x^2+x}{x^3-3x^2-4x+12} > 0$     54)  $\frac{4x^4+3x^2-1}{4x^4-3x^2-1} \leq 0$
- 55)  $\frac{x^3+x^2-3x+1}{x^3-x} \geq 0$     56)  $\frac{x^5-5x^3+6x}{4x+6} \geq 0$     57)  $\frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{x^4}$     58)  $\frac{3x^3+x+2}{x^3} \geq 2$
- 59)  $\frac{(x-3)^4}{(x-4)^3} < 0$     60)  $\frac{x^4-625}{x^4+625} < 0$     61)  $\frac{x^3-64}{x^3+64} > 0$     62)  $\frac{x^6}{x^4-3} > 0$
- 63)  $\frac{x^4+3}{x^7} > 0$     64)  $\frac{12+x^2(x^2-1)}{x^4} > 0$     65)  $\frac{x^4-x^2-12}{x^4} > 1$     66)  $\frac{x^4-10x^2+9}{x^6-10x^3+9} > 0$
- 67)  $\frac{(x+3)^3}{x^3+3} \leq 0$     68)  $\frac{(x+3)^4}{x^4+3} \leq 0$     69)  $\frac{x^4}{x^4-x^2+2x-1} < 0$     70)  $\frac{x^6-x^2}{x^5-x^2} > 0$
- 71)  $\frac{x^2+3x-4}{4+3x-x^2} \leq 0$     72)  $\frac{5}{x^7+3} < 0$     73)  $\frac{5}{x^7+3} < 1$     74)  $\frac{x^4-x}{x^4} < 1$
- 75)  $\frac{x^4-1}{x^4+x^2} < 2$     76)  $1+x < \frac{2}{x}$     77)  $1+x^2 < \frac{2}{x^2}$     78)  $1+x^3 < \frac{2}{x^3}$
- 79)  $\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^3 \geq 0$     80)  $\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^4 \geq 0$     81)  $\frac{x^3+1}{x^3-2} < 0$     82)  $\frac{x^4+1}{x^4-2} < 0$

## ♥ RIFLESSIONE METODOLOGICA MOLTO IMPORTANTE

$$\frac{x^3 - x^2 - 9x + 9}{x^3 - 2x^2} < 0$$

In una disequazione fratta nella quale N e/o D siano di grado sup. al 2°, **INNANZITUTTO** bisogna **SCOMPORRE** sia il N che il D in fattori ciascuno dei quali deve essere:  
o di 1° grado, o di 2° grado, oppure “di tipo particolare”

Infatti, se si fa in questo modo, si ottiene la situazione seguente:  $\frac{N_1}{D_1} \frac{N_2}{D_2} < 0$

e basterà allora studiare il segno di ogni singolo fattore in gioco  
e **PASSARE POI SUBITO ALLO SCHEMA FINALE, CHE AVRA' 4 RIGHE:**

N<sub>1</sub> ...

N<sub>2</sub> ...

D<sub>1</sub> ...

D<sub>2</sub> ...

☺ ... **TUTTO MOLTO VELOCE E TRANQUILLO!**

**SE INVECE non si scompone, il procedimento diventa INUTILMENTE LUNGO E NOIOSO!**

$$\frac{N}{D} < 0$$

N > 0, FATTORIZZAZIONE seguita da un **PRIMO SCHEMA**

D > 0, FATTORIZZAZIONE seguita da un **SECONDO SCHEMA**

... e infine lo SCHEMA CONCLUSIVO N ...  
D ...

☹ **CHE BARBA !!!**



### SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI della pagina precedente

- 1)  $-2 < x < 8$    2)  $5/4 \leq x < 3/2$    3)  $x < 1 \vee x > 5$  (volendo, si poteva semplificare ...)
- 4)  $x > 5$  (il denominatore, costante positiva, se ne può andare!)   5)  $-3 < x < -1$    6)  $-3 < x \leq -1$
- 7)  $x < -1/4 \vee x > -1/5$    8)  $x < -1/4 \vee x \geq -1/5$    9)  $0 < x < 4$    10)  $-4 < x < 4$    11)  $x > -3$
- 12)  $x < 5$    13)  $1/2 < x < 2$    14)  $0 \leq x < 5$    15)  $0 < x \leq 4/3$    16)  $x < 0$    17)  $x > 7$    18)  $x < 5 \vee x > 7$
- 19)  $2 < x < 3 \vee 4 < x < 5$    20)  $x \leq -3 \vee 1 < x \leq 4$    21)  $1/2 < x < 1 \vee x > 2$    22)  $x \leq -1 \vee x \geq 1 \wedge x \neq 2$
- 23)  $x < 1 \vee 2 \leq x \leq 7 \vee x > 14$    24)  $3 < x < 5 \vee x = 0$    25)  $\forall x \in \mathbb{R}$    26)  $-\sqrt{14} \leq x < 0 \vee \sqrt{14} \leq x < 14$
- 27)  $1/4 < x < 4 \wedge x \neq 1/3$    28)  $x \leq -1 \vee 2 - \sqrt{5} < x \leq 1/6 \vee x > 2 + \sqrt{5}$    29)  $0 < x < 2$
- 30)  $x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3} \wedge x \neq 3$    31)  $1 < x < 3$    32)  $2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2} \wedge x \neq 2$
- 33)  $-1/4 < x < -1/6$    34)  $x < 2 \vee 4 \leq x < 8$    35)  $x < -1 \vee 0 \leq x < 1 \vee x \geq 4$
- 36)  $x \leq 2 - \sqrt{3} \vee x \geq 2 + \sqrt{3} \wedge x \neq 0$    37)  $x < 0 \vee x > 4$    38)  $x > -4$
- 39)  $x < -4 \vee -2 < x < 2 \vee x > 4$    40)  $0 < x < 1 \vee 5 < x < 7$    41)  $x = -1$    42)  $x \neq -3 \wedge x \neq 0$
- 43)  $x > 5 \wedge x \neq 6$    44)  $-2 < x < 1 \wedge x \neq 0$    45)  $-2 \leq x \leq -1$    46)  $1 < x < 5 \wedge x \neq \sqrt{2}$
- 47)  $x < -1 \vee 0 < x < 1$    48)  $x < 2 \vee x \geq 4 \wedge x \neq -3$    49)  $x > 1$    50)  $1 < x < 2$
- 51)  $x < -\sqrt{2} \vee (-1 < x < 1 \wedge x \neq 0) \vee x > \sqrt{2}$    52)  $-1 \leq x < 2$    53)  $x < -2 \vee (0 < x < 2 \wedge x \neq 1) \vee x > 3$
- 54)  $-1 < x \leq -1/2 \vee 1/2 \leq x < 1$    55)  $x \leq -1 - \sqrt{2} \vee -1 < x < 0 \vee x \geq -1 + \sqrt{2} \wedge x \neq 1$
- 56)  $x \leq -\sqrt{3} \vee -3/2 < x \leq -\sqrt{2} \vee 0 \leq x \leq \sqrt{2} \vee x \geq \sqrt{3}$    57)  $x \leq -1 \vee x \geq 1$    58)  $x \leq -1 \vee x > 0$
- 59)  $x < 4 \wedge x \neq 3$    60)  $-5 < x < 5$    61)  $x < -4 \vee x > 4$    62)  $x < -\sqrt[4]{3} \vee x > \sqrt[4]{3}$    63)  $x > 0$
- 64)  $x \neq 0$    65) imposs.   66)  $x < -3 \vee (-1 < x < \sqrt[3]{9} \wedge x \neq 1) \vee x > 3$    67)  $-3 \leq x < -\sqrt[3]{3}$    68)  $x = -3$
- 69)  $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \wedge x \neq 0$    70)  $x > -1 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 1$    71)  $x \leq -4 \vee -1 < x \leq 1 \vee x > 4$
- 72)  $x < -\sqrt[3]{3}$    73)  $x < -\sqrt[3]{3} \vee x > \sqrt[3]{2}$    74)  $x > 0$    75)  $x \neq 0$    76)  $x < -2 \vee 0 < x < 1$    77)  $-1 < x < 1 \wedge x \neq 0$
- 78)  $x < -\sqrt[3]{2} \vee 0 < x < 1$    79)  $x \leq -1 \vee x > 2$    80)  $x \neq 2$    81)  $-1 < x < \sqrt[3]{2}$    82)  $-\sqrt[4]{2} < x < \sqrt[4]{2}$