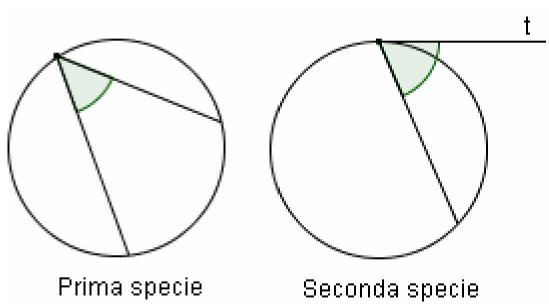
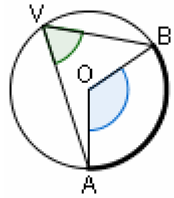
## 6.4 - ANGOLI ALLA CIRCONFERENZA E ANGOLI AL CENTRO

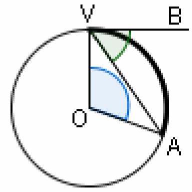
Def. Si dice "**angolo alla circonferenza**" un angolo avente il **vertice sulla circonferenza**, e i **lati**
i) **ENTRAMBI SECANTI** la circonferenza (angolo alla circonferenza "di **prima specie**")
ii) oppure **UNO SECANTE E L'ALTRO TANGENTE** (angolo alla circ. "di **seconda specie**")




Per un angolo alla circonferenza,
**l'angolo al centro "CORRISPONDENTE"**
è quello che **contiene lo stesso arco**,
o, come si usa dire, che "**insiste sullo stesso arco**".




$A\hat{V}B$ e $A\hat{O}B$ sono corrispondenti ←



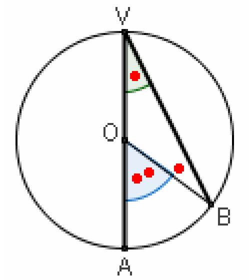

$A\hat{V}B$ e $A\hat{O}V$ sono corrispondenti ←

**TEOREMA**
**Ogni angolo alla circonferenza è uguale a metà dell'angolo al centro corrispondente**.

Per la **dimostrazione**, occorre **distinguere vari casi** (l'angolo alla circonf. sarà sempre indicato con $A\hat{V}B$).

♪ **1° CASO: $A\hat{V}B$ sia di 1ª SPECIE; si possono avere TRE SOTTOCASI, a seconda che il centro:**

**1) appartenga a uno dei lati dell'angolo**

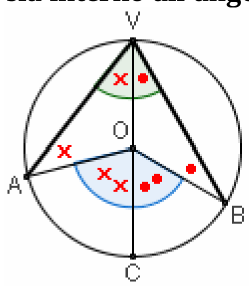



$$A\hat{O}B \underset{\substack{\text{teorema}\\ \text{angolo}\\ \text{esterno,}\\ \text{tr. OBV}}}{=} A\hat{V}B+\hat{B} \underset{\substack{\text{OBV}\\ \text{isoscele}\\ \text{quindi } A\hat{V}B=\hat{B}}}{=} 2A\hat{V}B$$

perciò

$$\mathbf{A\hat{V}B=\frac{1}{2}A\hat{O}B} \text{ c.v.d.}$$

**2) sia interno all'angolo**

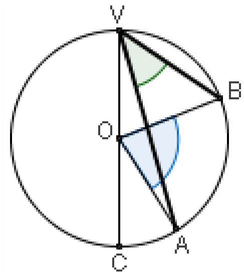



$$A\hat{V}C=\frac{1}{2}A\hat{O}C \text{ (sottocaso prec.)}$$

$$C\hat{V}B=\frac{1}{2}C\hat{O}B \text{ (sottocaso prec.)}$$

$$\underbrace{A\hat{V}C+C\hat{V}B}_{\mathbf{A\hat{V}B}}=\frac{1}{2}\underbrace{(A\hat{O}C+C\hat{O}B)}_{\mathbf{A\hat{O}B}} \quad \text{c.v.d.}$$

**3) sia esterno all'angolo**

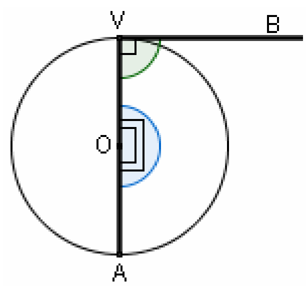



Lasciata
al bravo lettore.
Per differenza
anziché per somma …
La TH è

$$\mathbf{A\hat{V}B=\frac{1}{2}A\hat{O}B}$$

♫ **2° CASO: $A\hat{V}B$ sia di 2ª SPECIE; si possono avere TRE SOTTOCASI, a seconda che il centro:**

**1) appartenga a uno dei lati dell'angolo**

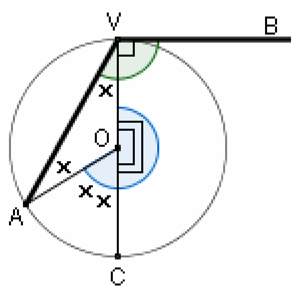



Semplicissimo: $A\hat{V}B=90°$
perché una tangente ad una circonf.
è sempre perpendicolare al raggio
che va al punto di contatto;

ma $A\hat{O}V=180°$;

pertanto $\mathbf{A\hat{V}B=\frac{1}{2}A\hat{O}V}$ c.v.d.

**2) sia interno all'angolo**

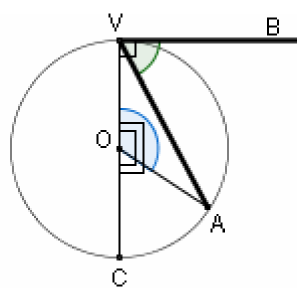



$$A\hat{V}C=\frac{1}{2}A\hat{O}C \text{ (1° caso, 1°sott.)}$$

$$C\hat{V}B=\frac{1}{2}C\hat{O}V \text{ (2° caso, 1°sott.)}$$

$$\underbrace{A\hat{V}C+C\hat{V}B}_{\mathbf{A\hat{V}B}}=\frac{1}{2}\underbrace{(A\hat{O}C+C\hat{O}V)}_{\mathbf{A\hat{O}V_{concavo}}} \quad \text{c.v.d.}$$

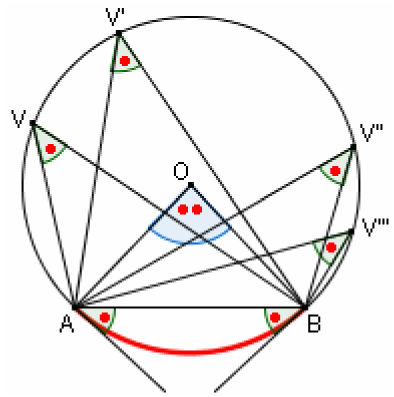
**3) sia esterno all'angolo**




Lasciata
al diligente lettore.
Per differenza
anziché per somma …

La tesi è $\mathbf{A\hat{V}B=\frac{1}{2}A\hat{O}V}$

**COROLLARIO 1**
**Tutti gli angoli alla circonferenza che insistono su di uno stesso arco sono uguali.**



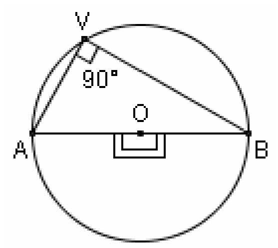

Infatti sono tutti uguali a metà dello stesso angolo al centro!

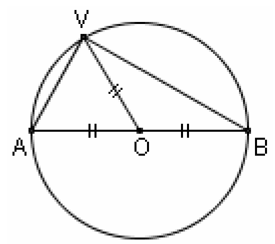
Nella figura:

$$\hat{V} = \hat{V}' = \hat{V}'' = \hat{V}''' = \dots$$

perché sono tutti uguali a $\frac{1}{2} A\hat{O}B$.

**COROLLARIO 2**
**Un angolo alla circonferenza che insiste su di una semicirconferenza**
**(o, come si preferisce dire, che "è inscritto" in una semicirconferenza;**
**o, come si suole anche dire seppure impropriamente, che "insiste su un diametro"),**
**è RETTO.**

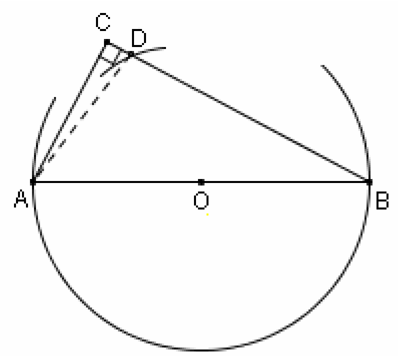



Nella figura, l'angolo alla circonferenza $A\hat{V}B$ "**insiste**" sulla semicirconferenza che va da A fino a B, e NON passa per V; si può anche dire (e, in effetti, *si preferisce* dire) che "**è inscritto**" nell'**altra** semicirconferenza (quella che va da A fino a B, passando per V).
Bene! $A\hat{V}B$ è retto, perché è metà dell'angolo al centro corrispondente $A\hat{O}B$ che è piatto.

IN ALTERNATIVA, la dimostrazione dello stesso enunciato si potrebbe anche effettuare applicando, al triangolo ABV, il teorema secondo cui "se in un triangolo la mediana relativa ad un lato è metà del lato stesso, allora il triangolo è rettangolo (e, precisamente, l'angolo retto è quello opposto al lato in questione)".

**COROLLARIO 3**
**In un triangolo rettangolo, la circonferenza avente per diametro l'ipotenusa**
**passa per il vertice dell'angolo retto.**




Questo teorema, che può essere pensato come l'inverso del precedente corollario 2, si può dimostrare in diversi modi.
Ad esempio, è bella la seguente dimostrazione per assurdo.

Sia ABC un triangolo rettangolo in C;
se la circonferenza di diametro AB non passasse per C,
allora intersecherebbe il lato BC (o il suo prolungamento)
in un punto D distinto da C.
Perciò l'angolo $A\hat{D}B$ sarebbe retto perché inscritto in una semicirconferenza, ed essendo pure retto (per ipotesi) l'angolo $A\hat{C}B$,
dal punto A si potrebbero condurre alla retta BC
due distinte perpendicolari,
mentre sappiamo che la perpendicolare
per un punto dato a una retta data è unica.

L'assurdo trovato dimostra la tesi.