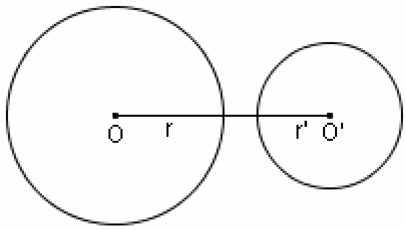
6.5 - POSIZIONI RECIPROCHE DI DUE CIRCONFERENZE

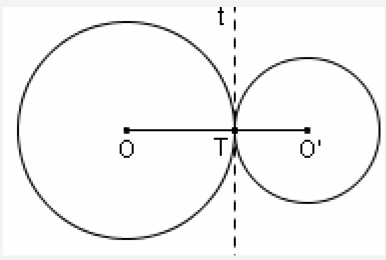
Due circonferenze (per tutte le figure di questa pagina, s'intende di indicare i due raggi con r ed r') possono essere: **esterne, tangenti esternamente, secanti, tangenti internamente, interne**.



Nel caso di due **circonferenze ESTERNE** si ha

$\mathbf{OO' > r + r'}$

(vale a dire, la distanza fra i centri è maggiore della somma dei raggi)



NOTA - Dire che "la congiungente i due centri passa per il punto di contatto" equivale, evidentemente, a dire che "i due raggi tracciati da ciascun centro al punto di contatto stanno uno sul prolungamento dell'altro (=formano angoli di 180°)"

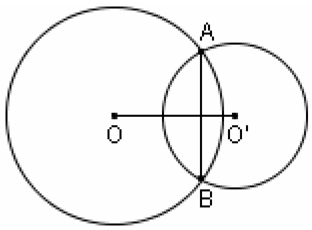
Nel caso di due circonferenze TANGENTI ESTERNAMENTE i due centri e il punto di contatto sono allineati

(in altre parole, *la congiungente i due centri passa per il punto di contatto; vedi NOTA*).

Ciò è del tutto evidente all'intuizione per motivi di simmetria; ma è anche dimostrabile (vedi APPROFONDIMENTO 1 alla pagina successiva).
Ne deriva che $\mathbf{OO' = r + r'}$
(**la distanza fra i centri è uguale alla somma dei raggi**)

Nel punto di contatto, le due circonferenze ammettono una retta tangente comune:
infatti la perpendicolare ad OO' passante per il punto di contatto T

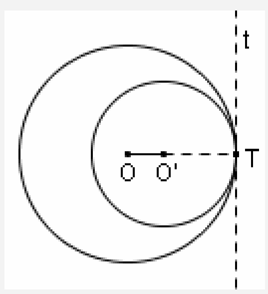
- è tangente alla circonferenza di centro O (perché perpendicolare al raggio OT nel suo estremo)
- ed è anche tangente alla circonferenza di centro O' (perché perpendicolare al raggio $O'T$ nel suo estremo)



Nel caso di due **circonferenze SECANTI**, si ha

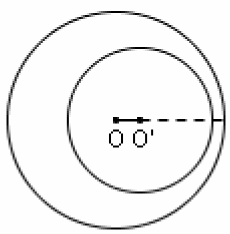
$\mathbf{OO' < r + r'}$

E' inoltre facile dimostrare (APPROFONDIMENTO 2 alla pagina successiva) che **la congiungente i centri (OO') è l'asse della corda comune (AB)**



Anche nel caso di due **circonferenze TANGENTI INTERNAMENTE** si può dimostrare (come d'altronde si intuisce per evidenti motivi di simmetria) che **i due centri e il punto di contatto sono allineati**, ossia che *la congiungente i due centri, se prolungata, passa per il punto di contatto*, oppure, volendo, che *i due raggi aventi un estremo nel punto di contatto sono parzialmente sovrapposti*).
Ne deriva che $\mathbf{OO' = r - r'}$ (se r' è il raggio più piccolo):
la distanza fra i centri è uguale alla differenza dei raggi.

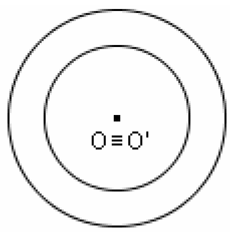
La perpendicolare ad OO' nel punto di contatto T, essendo simultaneamente perpendicolare ai due raggi OT e $O'T$ nel loro estremo, è tangente ad entrambe le circonferenze.



Nel caso delle **circonferenze INTERNE**, si avrà

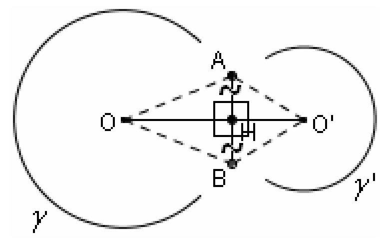
$\mathbf{OO' < r - r'}$

Un **caso particolare di circonferenze interne** è rappresentato da due **circonferenze CONCENTRICHE** (= aventi lo stesso centro).



APPROFONDIMENTO 1

Nel caso di due circonferenze tangenti esternamente
i due centri e il punto di contatto sono allineati
(in altre parole, la congiungente i due centri passa per il punto di contatto).

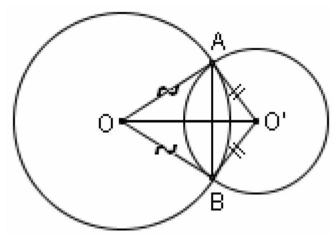


L'enunciato è evidente all'intuizione per simmetria; tuttavia, dimostriamolo.
Siano γ, γ' due circonferenze tangenti esternamente;
indichiamo con O e O' i loro centri, con A il loro punto di contatto.
Se, per assurdo, A NON stesse sulla congiungente OO',
allora potremmo andare a considerare il punto B,
simmetrico di A rispetto alla congiungente OO' (ossia, il punto B ottenibile tracciando da A
il segmento AH perpendicolare ad OO', poi prolungandolo di un segmento $HB = AH$).
Avremmo subito le uguaglianze $AHO = BHO$ e $AHO' = BHO'$ (1° Criterio)
da cui si trarrebbe $OB = OA$ e $O'B = O'A$.
Ma $OB = OA$ significa che anche OB, al pari di OA, è un raggio della circonferenza γ, e ciò implica $B \in \gamma$.
Analogamente, $O'B = O'A$ significa che anche $O'B$, al pari di $O'A$, è un raggio di γ', e ciò implica $B \in \gamma'$.
Avendosi ora $B \in \gamma$ e $B \in \gamma'$ ne deriva che le due circonferenze hanno in comune *anche* il punto B,
e *non soltanto* il punto A: non sono quindi tangenti, come avevamo supposto.
L'assurdo trovato dimostra la tesi.

APPROFONDIMENTO 2

Nel caso di due circonferenze secanti,
la congiungente i centri (OO') è l'asse della corda comune (AB).

Questo enunciato si può dimostrare in più modi diversi,
ad esempio ragionando nel modo seguente.



Poiché OA = OB,
il punto O è equidistante dagli estremi del segmento AB
per cui appartiene al suo asse;
d'altra parte, essendo $O'A = O'B$, anche il punto O' è equidistante
dagli estremi del segmento AB e quindi appartiene al suo asse.
Ma allora, sia O che O' appartengono all'asse del segmento AB;
in altre parole, l'asse di AB passa sia per O che per O':
l'asse di AB si identifica con la retta OO'.

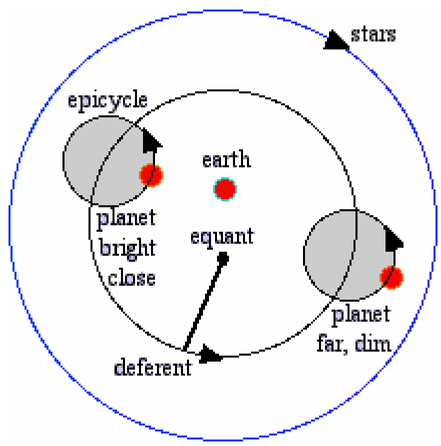
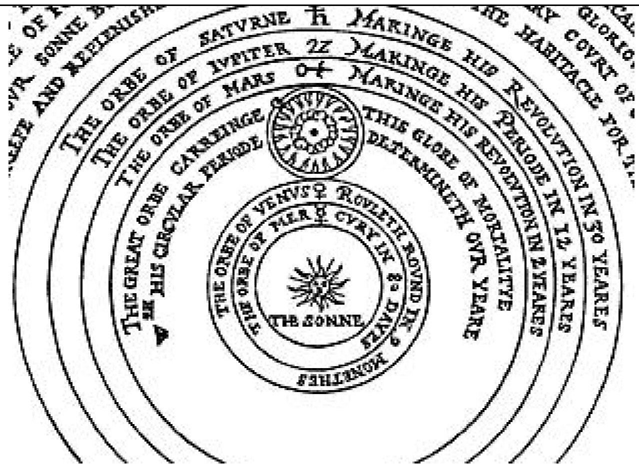


Immagine tratta dal sito http://web.me.com/dtrapp/ di Dave Trapp



Apollonio (III secolo A.C.), Ipparco (II secolo A.C.) e Tolomeo (II secolo D.C.) erano così convinti che i movimenti dei corpi celesti non potessero avere altra forma se non quella "perfetta" della circonferenza, che per conciliare questo assioma con le concrete osservazioni del cielo elaborarono complicati sistemi di "epicicli", "deferenti", "eccentrici" ed "equanti" con cui, a loro parere, le apparenti irregolarità osservabili nel moto dei pianeti erano interpretabili come l'effetto di una combinazione di moti, ciascuno dei quali, per conto suo, era esattamente circolare.

Quest'altra immagine rappresenta invece la visione del sistema solare di Thomas Digges, un astronomo inglese del XVI secolo che abbracciò la teoria eliocentrica di Copernico, ma che comunque rappresentava ancora le orbite dei pianeti come delle perfette circonferenze concentriche.
Fu il tedesco Johannes Kepler (1571-1630), noto in Italia come "Keplero", a sostenere per primo che i pianeti non descrivono traiettorie circolari bensì ellittiche.
Il paragrafo sulle *coniche* (pag. 98) dice qualcosa in più sulle orbite dei corpi celesti.