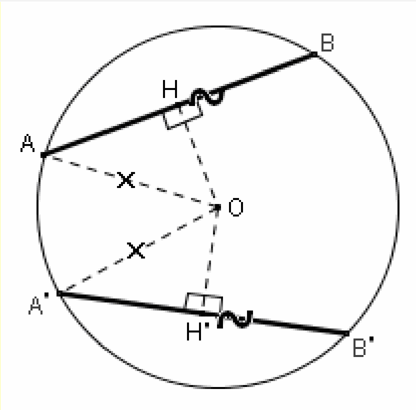
GEOMETRIA: ESERCIZI SUL CAPITOLO 6

1) **ESERCIZIO SVOLTO**
In una stessa circonferenza,
- **a) due corde uguali hanno ugual distanza dal centro;**
- **b) e viceversa, se due corde hanno ugual distanza dal centro, allora sono uguali.**



a)

HP $AB = A'B',\ \ OH \perp AB,\ \ OH' \perp A'B'$

TH $OH = OH'$

DIM.

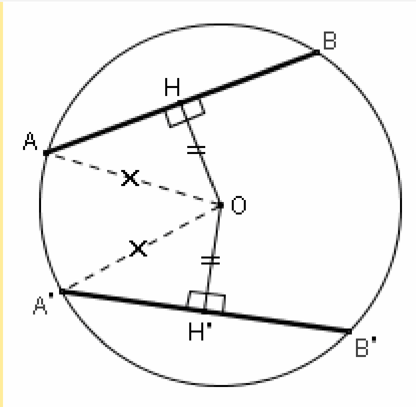
Traccio i due raggi OA e OA'
e confronto i due triangoli $OAH,\ OA'H'$:

- sono entrambi rettangoli
- $OA = OA'$ (raggi di una stessa circonferenza)
- $AH \underset{*}{=} \frac{1}{2}AB \underset{\substack{\text{per HP,}\\ AB=A'B'}}{=} \frac{1}{2}A'B' \underset{*}{=} A'H'$

* *è noto che la perpendicolare a una corda condotta dal centro dimezza la corda stessa*

quindi $OAH = OA'H'$ per il Criterio Particolare di Uguaglianza dei Triangoli Rettangoli (hanno rispettivamente uguali l'ipotenusa e un cateto).

Segue la tesi.



b)

HP $OH \perp AB,\ \ OH' \perp A'B',\ \ OH = OH'$

TH $AB = A'B'$

DIM.

Traccio i due raggi OA e OA'
e confronto i due triangoli $OAH,\ OA'H'$:

- sono entrambi rettangoli
- $OA = OA'$ (raggi di una stessa circonf.)
- $OH = OH'$ (ipotesi)

quindi $OAH = OA'H'$ per il Criterio Particolare di Uguaglianza dei Triangoli Rettangoli.

Segue $AH = A'H'$;
allora è pure $AB \underset{*}{=} 2AH = 2A'H' \underset{*}{=} A'B'$ c.v.d.

* *AB e A'B' sono i doppi di AH e A'H' rispett., perché è noto che la perpendicolare a una corda condotta dal centro dimezza la corda stessa.*

2) ☼ **(dimostrazione guidata a pagina 186)**
Dimostra che in una circonferenza, due punti di una corda, che abbiano ugual distanza dagli estremi di questa, sono equidistanti dal centro (*Indicazione: dal centro, traccia la perpendicolare alla corda*)

3) ⇨ Dato un angolo convesso di vertice O e di lati a, b, se con centro in O si traccia una circonferenza di raggio r, che intersechi la semiretta a in A e la b in B, poi con centri A e B rispettivamente si tracciano altre due circonferenze sempre con lo stesso raggio r della precedente, allora, detto C il 2° punto di intersezione (oltre a O) di tali due ultime circonferenze, la semiretta OC è bisettrice di $a\hat{O}b$.

4) Se si traccia una circonferenza con centro nel vertice A di un triangolo isoscele ABC di base BC, e si indicano con D, E i punti in cui tale circonferenza taglia i lati obliqui (o i loro prolungamenti dalla parte della base), allora la congiungente DE è parallela a BC.

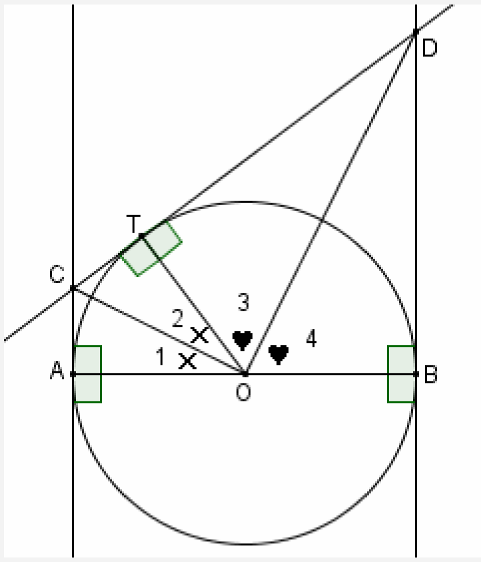
5) In una circonferenza, si tracciano un diametro AB e una corda CD ad esso parallela.
Si indicano poi con C' e D' rispettivamente, le proiezioni dei punti C e D su AB.
Dimostrare che $AC' = BD'$.

6) Se in una circonferenza due corde uguali AB e CD vengono prolungate di due segmenti uguali $BP = DQ$, allora l'asse del segmento PQ passa per il centro (*basta dimostrare che il centro è equidistante da P e da Q ...*)

7) ⇨ Se in una circonferenza, dai due estremi di un diametro, si tracciano due corde parallele fra loro, allora: I) queste corde sono uguali II) la congiungente gli altri due estremi passa per il centro

8) **ESERCIZIO SVOLTO**

In una circonferenza di centro O, sia AB un diametro.
Condotte le tangenti alla circonferenza in A e in B,
e una terza tangente
che incontri le altre due in C e in D,
dimostrare che $C\hat{O}D$ è retto.



HP AB diametro, T punto della circonferenza
AC, BD, CD (per T) tangenti

TH $C\hat{O}D = 90°$

NOTA

♥ In generale, quando si traccia una tangente ad una circonferenza, è sempre consigliabile evidenziare con un quadratino gli angoli retti che essa forma con il raggio che va ai punti di contatto.

DIMOSTRAZIONE

E' noto che quando da un punto esterno partono due tangenti a una circonferenza,
la congiungente il punto esterno col centro è bisettrice
sia dell'angolo formato dalle due tangenti,
sia dell'angolo formato dai due raggi che vanno ai punti di contatto.

Ora, pensando alle due tangenti che si tagliano in C, ne consegue

$$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

e pensando alle due tangenti che si tagliano in D, ne deriva

$$\hat{O}_3 = \hat{O}_4$$

Allora, poiché $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 = 180°$, si avrà

$$\hat{O}_2 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_3 = 180°$$
$$2\hat{O}_2 + 2\hat{O}_3 = 180°$$
$$2\left(\hat{O}_2 + \hat{O}_3\right) = 180°$$
$$\hat{O}_2 + \hat{O}_3 = 90°$$

ossia

$C\hat{O}D = 90°$, c.v.d.

9) Se da un punto esterno ad una circonferenza si conducono le due tangenti,
l'angolo da queste formato e l'angolo formato dai due raggi che vanno ai punti di contatto
sono fra loro supplementari.

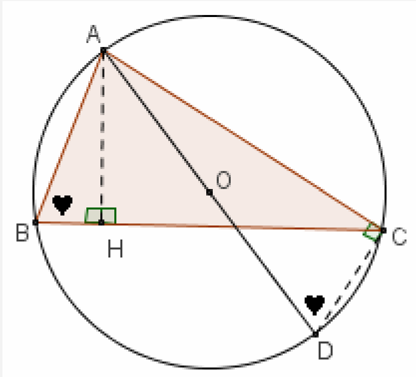
10) ⇨ Siano PA e PB le due tangenti a una circonferenza condotte da un punto esterno P.
Sia C un punto arbitrario, preso sul più piccolo dei due archi di estremi A e B.
Si tracci la tangente in C e si indichino con D, E i punti in cui questa tangente interseca PA e PB.
Dimostrare che il perimetro del triangolo PDE rimane costante, al variare del punto C.

11) ☼ **(dimostrazione guidata a pagina 186)**
Prese due circonferenze concentriche (sia O il centro comune),
e un punto A esterno ad entrambe,
si tracciano le due tangenti AB, AC alla circonferenza maggiore,
e le due tangenti AD, AE alla minore (con B, D situati dalla stessa parte rispetto ad AO).
E' richiesto di dimostrare che:

I. $B\hat{A}D = C\hat{A}E$
II. BCED è un trapezio isoscele
III. il punto di incontro delle diagonali di BCED sta su AO.

12) **ESERCIZIO SVOLTO**

In una circonferenza di centro O
è inscritto un triangolo ABC (vedi figura).
Si tracciano l'altezza AH e il diametro AD.
E' richiesto di dimostrare che
i due angoli $B\hat{A}H$ e $D\hat{A}C$ sono uguali



HP ABC triangolo inscritto
$AH \perp BC$

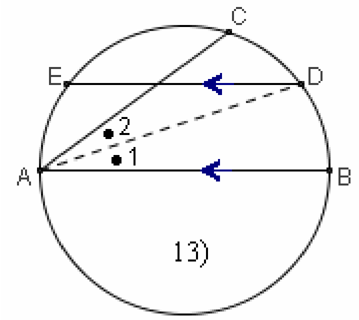
TH $B\hat{A}H = D\hat{A}C$

DIMOSTRAZIONE

Congiungiamo C con D.
L'angolo $A\hat{C}D$ è retto perché inscritto in una semicirconferenza.
Gli angoli $\hat{B}$ e $\hat{D}$ sono uguali perché angoli alla circonferenza che insistono su di uno stesso arco.
Allora i due triangoli ABH e ADC,
poiché hanno due angoli rispettivamente uguali,
avranno uguale anche l'angolo rimanente:

$$B\hat{A}H = 180° - A\hat{H}B - \hat{B} = 180° - A\hat{C}D - \hat{D} = D\hat{A}C$$

13) ☼ (vedi figura; **dimostrazione guidata a pagina 187**)
Considera un angolo alla circonferenza $B\hat{A}C$,
con B e C sulla circonferenza,
tracciane la bisettrice, fino ad incontrare la circonferenza in D,
poi per D traccia la parallela al lato AB dell'angolo,
che incontri la circonferenza in E.
Dimostra a questo punto che $DE = AC$.



14) ⇨ Se i punti $V, V', V'', V''', ...$
"vedono un segmento dato AB sotto lo stesso angolo",
vale a dire:
se $A\hat{V}B = A\widehat{V'}B = A\widehat{V''}B = A\widehat{V'''}B = ...$,
allora i punti $A, B, V, V', V'', V''', ...$ stanno su di una stessa circonferenza
(*dimostra, per assurdo,*
che la circonferenza passante per i 3 punti A, B, V
deve necessariamente passare anche per V')

15) Dimostra che la circonferenza, avente per diametro uno dei lati di un triangolo,
interseca gli altri due lati nei piedi delle altezze ad essi relative.

16) Siano PA e PB le due tangenti a una circonferenza condotte da un punto esterno P.
Sia F un punto arbitrario, preso sul maggiore dei due archi di estremi A e B.
La somma $P\hat{A}F + P\hat{B}F$ rimane costante, al variare del punto F: dimostralo.

17) ⇨ La tangente nel punto medio di un arco è parallela alla corda sottesa dall'arco stesso;
e viceversa,
se in una circonferenza una tangente è parallela a una corda, allora
il punto di contatto è il punto medio dell'arco che sottende la corda.
NOTA - *Ricorda che in una circonferenza ad angoli al centro uguali*
corrispondono archi uguali e corde uguali, e viceversa.

18) Due circonferenze di centri O e O' sono tangenti esternamente in T.
Tracciata per T una retta r, che intersechi la circonferenza di centro O in A,
e quella di centro O' in A', dimostrare che il raggio OA è parallelo al raggio O'A'.

19) Due circonferenze di centri O e O' sono tangenti esternamente in T.
Tracciata per T una retta r,
che intersechi la circonferenza di centro O in A, e quella di centro O' in A',
e tracciate le tangenti in A e in A', dimostrare che tali due rette tangenti sono parallele.

20) ☼ (**dimostrazione guidata a pagina 187**)
Due circonferenze di centri O e O' sono tangenti esternamente in T. Si traccino per T:
- una retta r, che intersechi le due circonferenze rispettivamente in A e in A',
- e una seconda retta s, che le intersechi rispettivamente in B e in B'.

Dimostrare che le due corde AB e A'B' sono parallele fra loro.

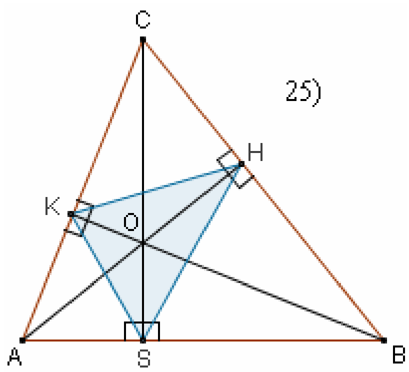
21) Due circonferenze sono tangenti internamente in B.
Dall'estremo A del diametro AB della circonferenza maggiore, si conduca una tangente alla minore, che la tocchi in C e vada poi a intersecare la circonferenza maggiore in D.
Dimostrare che:
I) indicato con O il centro della circonferenza minore, è CO || DB
II) BC taglia in due parti uguali (= "biseca") l'angolo $A\hat{B}D$

22) Su di una circonferenza di centro O, si prende un punto qualunque P,
dopodiché, detto AB un diametro, si tracciano le due rette tangenti in P e in B,
indicando con Q il loro punto di incontro.
Dimostrare che la congiungente QO è parallela alla corda PA.

23) Se una circonferenza è inscritta in un triangolo isoscele, il punto di contatto
della base del triangolo con la circonferenza è il punto medio della base stessa.

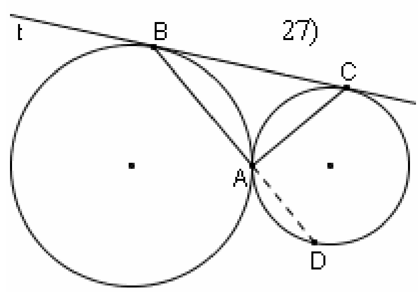
24) ☼ (**dimostrazione guidata a pagina 187**)
In un triangolo isoscele il vertice, il centro della circonferenza inscritta e il punto medio della base sono allineati.

25) ⇨ (*L'ultima parte è molto impegnativa*)
In un triangolo ABC,
le tre altezze sono AH, BK, CS, l'ortocentro è O.
a) Dimostra che il quadrilatero OHCK è inscrivibile in una circonf.
b) Dimostra che il quadrilatero ABHK è inscrivibile in una circonf.
c) I centri di tali due circonferenze stanno in posizioni molto particolari: sapresti specificarle? E giustificare la risposta?
d) Quali altri quadrilateri della figura sono inscrivibili in una circonferenza?
e) Dimostra che le tre altezze AH, BK, CS sono bisettrici degli angoli del triangolo HKS avente per vertici i piedi delle altezze stesse.



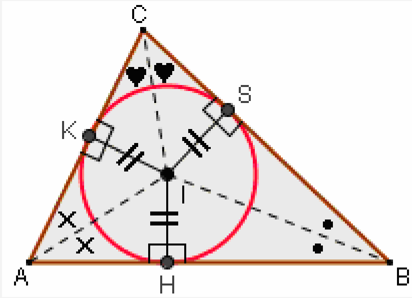
26) Due circonferenze, di centri O e O', sono secanti;
A e B ne sono i punti di intersezione.
Per B si conduce una retta che taglia le due circonferenze in C e in C' rispettivamente.
Dimostrare che gli angoli $C\hat{A}C'$ e $O\hat{A}O'$ sono uguali fra loro.

27) ⇨ Due circonferenze sono tangenti esternamente in A,
e una retta tangente comune t tocca
la prima circonferenza in B e la seconda in C.
a) Dimostra che l'angolo $B\hat{A}C$ è retto
b) Dimostra che, se si prolunga la corda BA fino ad incontrare la seconda circonferenza in D, la congiungente CD è un diametro della seconda circonferenza.



28) (importante; ESERCIZIO SVOLTO)

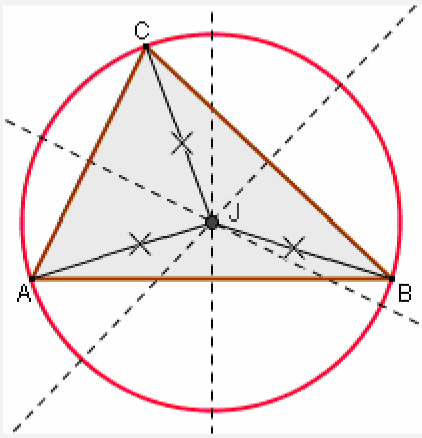
Per ogni TRIANGOLO, esiste sempre la circonferenza INSCRITTA.
Il suo centro coincide col punto di incontro delle BISETTRICI, ossia con l' INCENTRO.



Sia ABC un triangolo qualsiasi.
Tracciamo le bisettrici dei tre angoli interni:
esse, come sappiamo, si incontreranno in uno stesso punto (l'*incentro*, indicato in figura con I).
E' noto che ogni punto della bisettrice di un angolo è equidistante dai lati dell'angolo stesso: quindi si avrà $IH = IK = IS$.
Perciò, se si punta il compasso in I con raggio $IH = IK = IS$, la circonferenza tracciata passerà per i 3 punti H, K, S, che appartengono ai lati del triangolo e in corrispondenza dei quali tali lati, formando angoli retti col raggio, risulteranno tangenti alla circonferenza stessa. Il triangolo ABC sarà perciò circoscritto alla circonferenza tracciata, e questa sarà a sua volta inscritta nel triangolo dato.

29) (importante; ESERCIZIO SVOLTO)

Per ogni TRIANGOLO, esiste sempre la circonferenza CIRCOSCRITTA.
Il suo centro coincide col punto di incontro degli ASSI dei lati, ossia col CIRCOCENTRO.



Che per tre punti distinti e non allineati passi una (e una sola) circonferenza ci è già noto. Qui è però anche richiesto di dimostrare che il centro di tale circonferenza coincide col circocentro del triangolo.
Sia ABC un triangolo qualsiasi. Tracciamo gli assi dei tre lati:
essi, come sappiamo, si incontreranno in uno stesso punto (il *circocentro*, indicato in figura con J).
E' noto che ogni punto dell'asse di un segmento è equidistante dagli estremi del segmento stesso: quindi si avrà $JA = JB = JC$.
Perciò, se si punta il compasso in J con raggio $JA = JB = JC$, la circonferenza tracciata passerà per i 3 punti A, B, C e sarà dunque la circonferenza circoscritta in questione.

Le parole "INcentro" e "CIRCOcentro", usate per indicare risp. il punto di incontro delle bisettrici e degli assi dei lati in un triangolo, sono dovute proprio al fatto che tali punti notevoli coincidono col centro della circonferenza INscritta e CIRCOscritta.

Altri esercizi (**TEOREMI MOLTO IMPORTANTI**, DA **TENERE A MEMORIA**!)

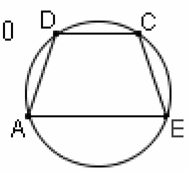
30) ☼ **Un trapezio inscritto in una circonferenza è sempre isoscele** (*figura*; **dim. guidata a pag. 188**)

31) ☼ **In un triangolo rettangolo, la somma dei cateti supera l'ipotenusa di un segmento uguale al diametro della circonferenza inscritta nel triangolo** (*figura*; **dim. guidata a pag. 188**)

32) ☼ **Se un trapezio è circoscritto ad una SEMIcirconferenza** (cioè, se la sua base maggiore sta sulla retta del diametro, e lati obliqui e base minore sono tangenti alla semicirconferenza), allora **la base maggiore è uguale alla somma dei due lati obliqui** (*figura*; **dim. guidata a pag. 188**)

COROLLARIO: In un trapezio ISOSCELE circoscritto ad una SEMIcirconferenza la base maggiore è il doppio del lato obliquo (= il lato obliquo è metà della base maggiore). Vedi *figura*.

fig. 30



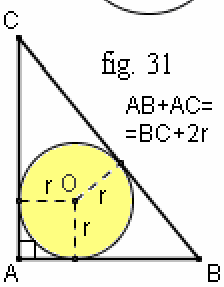
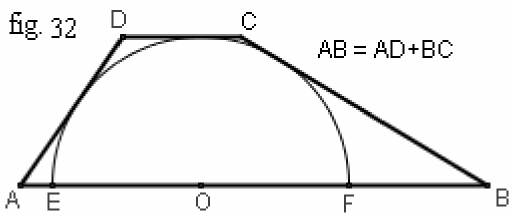
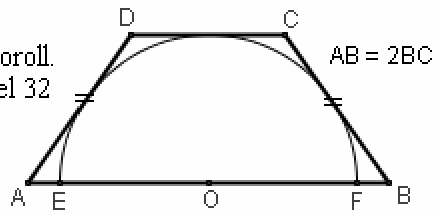


fig. 31

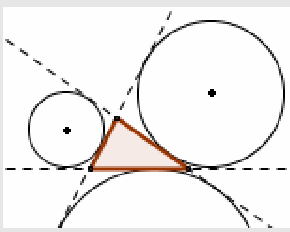
fig. 32



Coroll. del 32

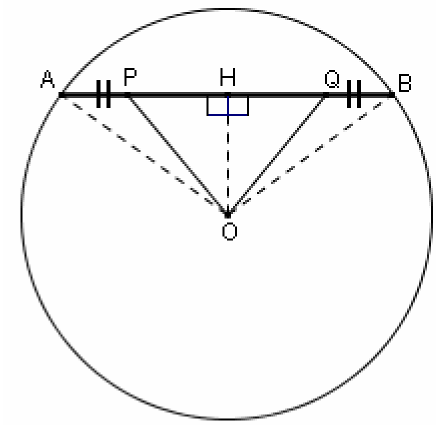


33) In ogni triangolo, oltre alle circonf. inscritta e circoscritta, esistono anche le tre circonferenze "ex-inscritte", ciascuna tangente a un lato e ai prolungamenti degli altri due lati. Dove stanno i loro centri? ⇨



☼ DIMOSTRAZIONI GUIDATE di alcuni fra gli esercizi (freccia = link alla dimostrazione completa)

2)
⇨



HP: PA = QB

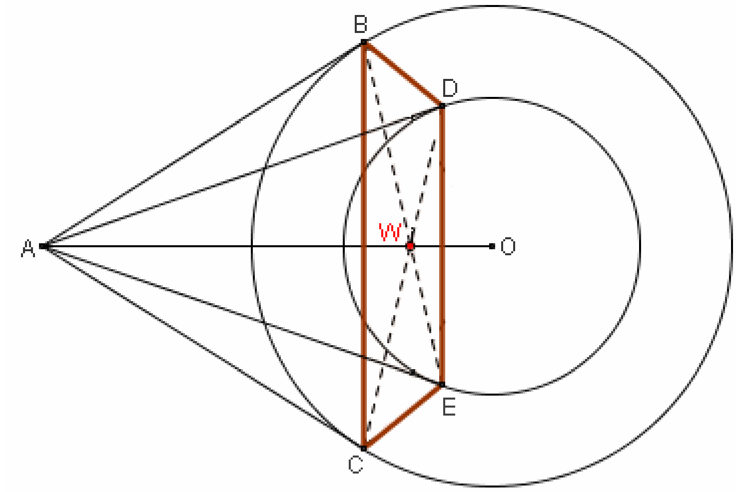
TH: PO = QO

DIM.
Dal centro O, tracciamo la perpendicolare OH alla corda AB.
Un teorema noto ci assicura che H è il punto medio di AB: HA = HB.
Dunque, per differenza di segmenti uguali, è HP = HQ:

$HP = \ldots - \ldots = \ldots - \ldots = HQ$ oppure $\begin{array}{c} HA = HB \\ \ldots = \ldots \\ \hline \underbrace{HA - \ldots}_{HP} = \underbrace{HB - \ldots}_{HQ} \end{array}$

Ora, confrontando i due triangoli OHP e OHQ, li si dimostra subito uguali per il … da cui la tesi.

11)
⇨



HP: AB, AC, AD, AE tangenti a due circonferenze concentriche

TH
I) $B\widehat{A}D = C\widehat{A}E$
II) DE || BC, BD = CE
III) il punto di incontro delle diagonali di BCED sta su AO

DIM.
I) E' noto che quando da un punto esterno si conducono le due tangenti ad una circonferenza, la congiungente il punto esterno col centro fa da … per l'angolo formato dalle due tangenti. Perciò

$$\begin{array}{c} O\widehat{A}B = \ldots \\ O\widehat{A}D = \ldots \\ \hline \ldots - \ldots = \ldots - \ldots \\ B\widehat{A}D = C\widehat{A}E \end{array}$$

II) Lo stesso teorema sulle due tangenti condotte a una circonferenza da un punto esterno afferma pure che la congiungente il punto esterno col centro è … della corda che ha per estremi i punti di contatto.
Quindi $AO \perp BC$, $AO \perp DE$
e di conseguenza BC e DE, essendo entrambe perpendicolari ad AO, sono … fra loro.
Con ciò resta provato che BCED è un trapezio.
Per far vedere che si tratta di un trapezio isoscele, occorre dimostrare che BD = … ;
a tale scopo basta rilevare che i due triangoli ABD e ACE sono uguali per il … avendo:
AB = AC perché … ; AD = AE per lo stesso motivo; $B\widehat{A}D = C\widehat{A}E$ come già dimostrato.

III) Come sappiamo, in un trapezio isoscele le diagonali si tagliano in parti … Detto perciò W il punto di intersezione delle diagonali del nostro trapezio isoscele BCED, si ha WB = … , WD = … .
La prima uguaglianza ci dice che W è equidistante dalle estremità del segmento BC, quindi appartiene all' … di BC. Ma l'asse di BC, come abbiamo visto al punto II), è la congiungente AO! Quindi W appartiene ad AO, c.v.d.

13) DIM.

Tracciamo le due congiungenti AE e DC
e confrontiamo i due triangoli EAD, CDA.
Essi hanno:

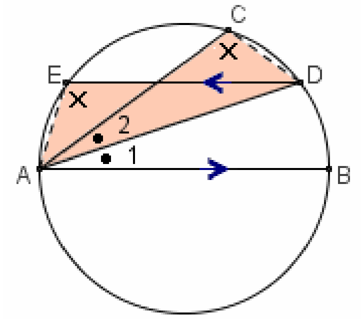
AD in comune

$E\widehat{D}A = \widehat{A}_2$ perché $E\widehat{D}A \underset{\text{in quanto} \dots}{=} \widehat{A}_1 \underset{HP}{=} \widehat{A}_2$

$A\widehat{E}D = A\widehat{C}D$ perché ….

Quindi si ha EAD = CDA per il …
e in particolare DE = AC, c.v.d.

HP: $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$, DE || AB
TH: DE = AC



20) DIM.

Si può procedere in più modi diversi, ma comunque sempre trafficando con gli angoli, dopo aver tracciato opportuni raggi. Probabilmente la dimostrazione più rapida è la seguente.

Osserviamo gli angoli indicati col pallino:
la loro uguaglianza è ovvia (…).
Ma allora saranno pure uguali fra loro
(per …)
i due angoli indicati col doppio archetto:

$B\widehat{O}T = B'\widehat{O'}T$.

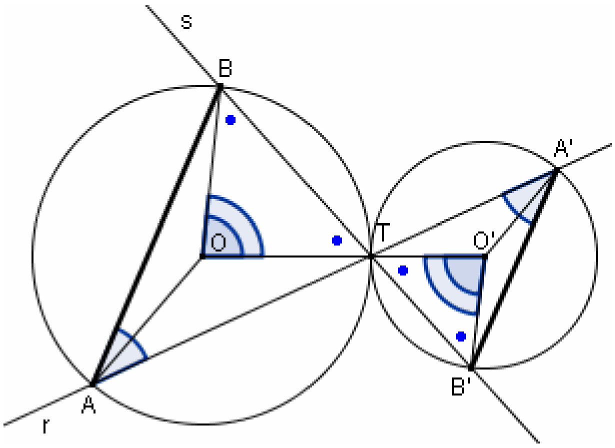
E di conseguenza avremo anche

$B\widehat{A}T = B'\widehat{A'}T$

perché …

Si può trarre, a questo punto, la conclusione:
AB || A'B' perché … , c.v.d.

TH: AB || A'B'



24) DIM.

1° metodo di ragionamento

E' noto che, quando da un punto esterno si conducono le due tangenti ad una circonferenza, la congiungente il punto esterno col centro è bisettrice dell'angolo formato dalle … .

Se dunque si traccia la semiretta AO, questa, nel triangolo isoscele ABC, farà da bisettrice per l'angolo al vertice e quindi, in virtù di un altro teorema noto, andrà a tagliare la base BC nel suo punto medio M.

A, O, M sono dunque allineati, c.v.d.

2° metodo

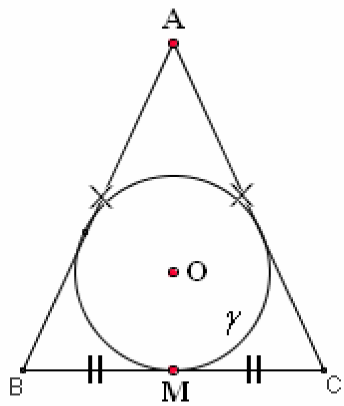
Se si traccia il segmento AM, questo sarà mediana relativa alla base nel triangolo isoscele ABC e di conseguenza sarà pure … dell'angolo al vertice $B\widehat{A}C$.

Ora, è noto che, quando da un punto esterno si conducono le due tangenti ad una circonferenza, la congiungente il punto esterno col centro è la bisettrice dell'angolo formato dalle due tangenti, il che è come dire che la bisettrice dell'angolo formato dalle due tangenti passa per il centro.

Dunque AM, essendo la bisettrice di $B\widehat{A}C$, passa per O:
A, O, M sono allineati, c.v.d.

HP:
AB = AC
γ circonferenza inscritta
BM = MC

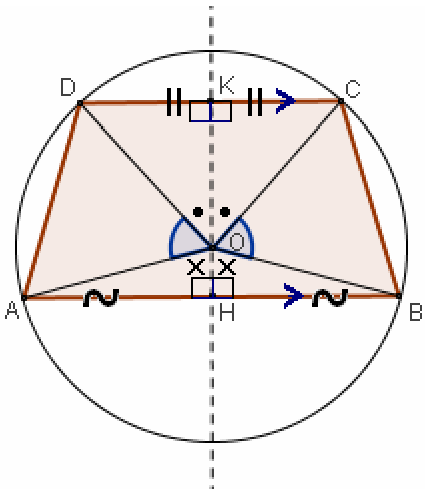
TH:
A, O, M sono allineati



30) DIM.

HP: $DC \parallel AB$, ABCD inscritto

TH: $AD = BC$



⇨ Tracciamo, per il centro O della circonferenza, la perpendicolare alle due rette, parallele fra loro, su cui giacciono le basi.
Come è ben noto, la perpendicolare a una corda condotta per il centro … la corda stessa.
Quindi è immediato dimostrare che sono uguali per il … le coppie di triangoli

$$OAH = OBH,\ \ ODK = OCK.$$

Ne consegue l'uguaglianza delle coppie di angoli indicate sulla figura con "crocetta" e con "pallino", ossia:

$$A\hat{O}H = B\hat{O}H,\ \ D\hat{O}K = C\hat{O}K\,.$$

Allora, per … , saranno uguali fra loro pure i due angoli indicati con "archetto":

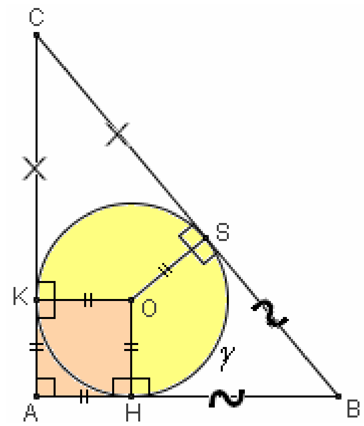
$$A\hat{O}D = B\hat{O}C\ \ .$$

E a questo punto, basta ricordare il teorema secondo cui **in una circonferenza ad angoli al centro uguali corrispondono …** , per avere la tesi.

31) DIM.

HP: $\hat{A} = 90°$, circonferenza inscritta

TH: $AB + AC = BC + 2r$



⇨ Il quadrilatero AKOH è un … ; infatti ha

- gli angoli retti
  $\hat{A} = 90°$ per … ,
  $A\hat{H}O = A\hat{K}O = 90°$ perché … ,
  quindi $H\hat{O}K = 90°$ per …
- e due lati consecutivi uguali
  ($OK = OH$ perché …).

Dunque è $AH = AK = OK = OH = \text{raggio} = r$
Inoltre, per il teorema … , $BH = BS;\ CK = CS$
La seguente catena dimostra la tesi:

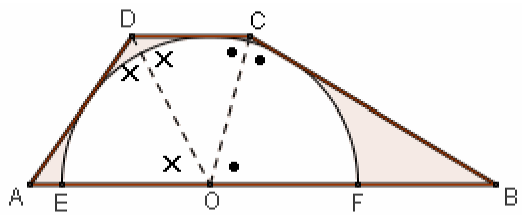
$$\begin{aligned} AB + AC &= (AH + BH) + (AK + CK) = \\ &= r + BS + r + CS = (BS + CS) + 2r = \\ &= BC + \text{diametro} \qquad \text{c.v.d.} \end{aligned}$$

32) DIM.

TH: $AB = AD + BC$

(nel caso del trapezio *isoscele*, $AB = 2AD = 2BC$, ossia

$AD = BC = \frac{1}{2}AB$)



⇨ Congiungiamo il centro O con le estremità C e D della base minore. Vediamo che

- $A\hat{O}D = C\hat{D}O$ perché … ;
- $C\hat{D}O = A\hat{D}O$ perché,
  per il teorema detto " … ",
  è noto che, quando da un punto esterno a una circonferenza (D) si tracciano le due tangenti (DA, DC), la congiungente il punto esterno col centro è bisettrice dell'angolo …

Quindi sono uguali gli angoli…
per cui il triangolo AOD è isoscele: $AO = AD$.
Analogamente si dimostra che è isoscele il triangolo BOC: $OB = BC$.
Dalle due uguaglianze di cui sopra segue

$$AB = AO + OB = AD + BC\ ,\ \ \text{c.v.d.}$$

Se poi il trapezio fosse isoscele, la tesi appena dimostrata diventerebbe

$$AB = AD + BC = 2AD = 2BC\ \rightarrow\ AD = BC = \frac{1}{2}AB$$