

GEOMETRIA Cap. 7: MISURA DELLE GRANDEZZE

7.1 - MISURIAMO I SEGMENTI

“**Misurare**” un segmento **a**
significa prendere un altro segmento di riferimento **u** (detto “unità di misura”)
e chiedersi quante volte **u** è contenuto in **a**.

A) QUANDO LA MISURA E' INTERA

Se **u** è contenuto in **a** esattamente **n** volte (**n** numero intero non negativo), si potrà scrivere
 $\mathbf{a} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}$ (generalmente il puntino di moltiplicazione si omette, scrivendo semplicemente: $\mathbf{a} = \mathbf{nu}$)
e si dirà che

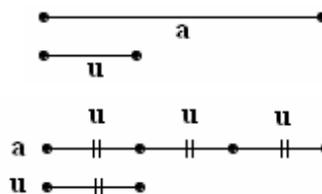
“la misura del segmento **a**, rispetto al segmento **u** assunto come unità di misura, è il numero **INTERO** **n**”.

La figura qui a fianco mostra due segmenti **a**, **u**.

a è il segmento che si vuole misurare,

u è il segmento che si vuole utilizzare come unità di misura.

Poiché **a** risulta uguale alla somma
di esattamente 3 segmentini, ciascuno uguale a **u**,
possiamo scrivere $\mathbf{a} = 3\mathbf{u}$
e affermare che “la misura di **a** (rispetto a **u**) è 3”.



B) QUANDO LA MISURA E' RAZIONALE

Se il segmento **u** NON è contenuto un numero intero di volte in **a**,
si ricorrerà ai cosiddetti “sottomultipli” di **u**
(vale a dire: la metà di **u**, la terza parte di **u**, la quarta parte di **u**, ecc. ecc.).

Dato un qualunque segmento **u**,

si dice “sottomultiplo di **u** secondo **n**” ciascuno dei segmentini che si ottengono dividendo **u** in **n** parti uguali.

Il sottomultiplo di **u** secondo **n** si indica col simbolo $\frac{1}{n} \cdot \mathbf{u}$ (oppure $\frac{1}{n} \mathbf{u}$),

che si può leggere: *un n-esimo*, oppure: *l'n-esima parte*, di **u**.

Se l'n-esima parte dell'unità di misura **u** è contenuta esattamente **m** volte
nel segmento **a** che intendiamo misurare, potremo scrivere

$$\mathbf{a} = \mathbf{m} \cdot \frac{1}{n} \mathbf{u} = \frac{\mathbf{m}}{n} \mathbf{u}$$

e diremo che

“la misura del segmento **a**, rispetto al segmento **u** assunto come unità di misura,
è il numero **RAZIONALE** $\mathbf{m/n}$ ”.

La figura qui a fianco mostra due segmenti **a**, **u**.

a è il segmento da misurare, **u** svolge il ruolo di unità di misura.

Si osserva che **u** non è contenuto un numero **intero** di volte in **a**
(3 volte è “troppo poco”, 4 volte è “troppo”).

Però, se dividiamo **u** in due parti uguali

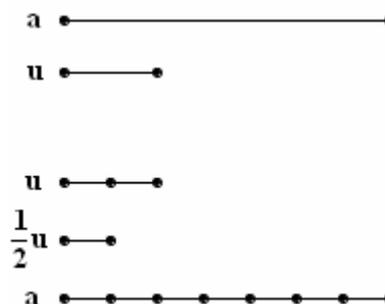
(costruendo, così, il segmento $\frac{1}{2} \mathbf{u}$),

vediamo che questo segmentino $\frac{1}{2} \mathbf{u}$

è contenuto esattamente 7 volte in **a**.

Poiché dunque **a** risulta uguale alla somma di esattamente 7 segmentini, ciascuno uguale a $\frac{1}{2} \mathbf{u}$,

possiamo scrivere $\mathbf{a} = 7 \cdot \frac{1}{2} \mathbf{u} = \frac{7}{2} \mathbf{u}$ e affermare che “la misura di **a** (rispetto a **u**) è $\frac{7}{2}$ ”.



C) QUANDO LA MISURA E' IRRAZIONALE

Si scopre tuttavia – cosa che lasciò del tutto sconcertati gli studiosi greci i quali, nel VI o V secolo a. C., per primi se ne accorsero – che per certe coppie di segmenti a , u , non avviene

- né che u sia contenuto un numero esatto di volte in a
- né che esista un sottomultiplo di u , che sia contenuto un numero esatto di volte in a .

In questo caso si dice che a , u sono “**incommensurabili**”.

DEF. Due segmenti a , u si dicono “**incommensurabili**” se **non hanno nessun sottomultiplo comune.**

Ad esempio, si può dimostrare il seguente importantissimo

TEOREMA - Il lato e la diagonale di uno stesso quadrato sono segmenti incommensurabili.

La *dimostrazione* è molto interessante: vediamo.

Se, per assurdo, esistesse un sottomultiplo s del lato AB del quadrato $ABCD$, contenuto un numero esatto di volte nella diagonale BD dello stesso quadrato, allora esisterebbero due numeri interi n , m , tali che

$$AB = ns, \quad BD = ms$$

I quadrati costruiti sui lati uguali AB e AD potrebbero allora essere suddivisi ciascuno in una griglia di n^2 quadratini di lato s , mentre il quadrato costruito sulla diagonale BD potrebbe essere suddiviso in una griglia di m^2 quadratini di lato s .

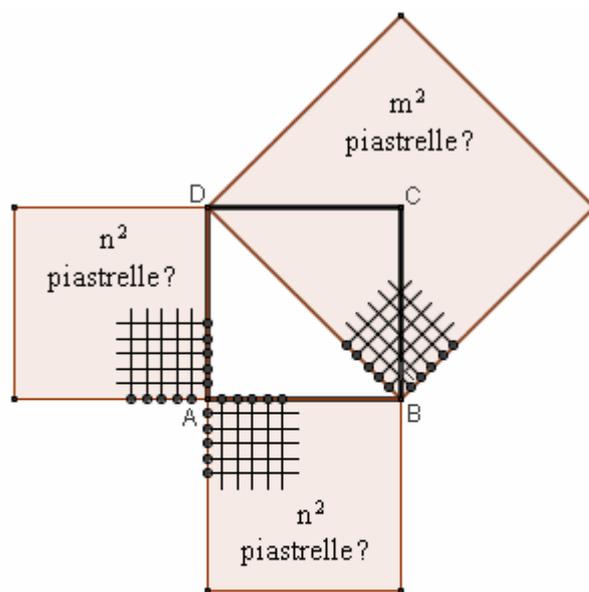
D'altra parte, per il Teorema di Pitagora, il quadrato costruito su BD è equivalente alla somma dei quadrati costruiti su AB e AD , e questo comporta che il numero totale di quadratini che “piastrellano” i due quadrati costruiti sui due lati AB e AD , sia uguale al numero dei quadratini che “piastrellano” il quadrato costruito sulla diagonale BD .

Dunque si avrà $n^2 + n^2 = m^2$ ossia $2n^2 = m^2$ per cui gli interi n ed m saranno tali che

$$\frac{m^2}{n^2} = 2 \rightarrow \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2.$$

Ma è possibile dimostrare (Teorema nel riquadro sottostante) che non può esistere alcuna frazione (=rapporto di due interi) la quale elevata al quadrato dia come risultato 2.

L'assurdo trovato dimostra la tesi.



Il segmentino s :

Supponiamo, per assurdo, che $AB=AD$ sia costituito da n di questi segmentini, mentre BD sia costituito da m di questi segmentini...

TEOREMA

Non esiste nessuna frazione (rapporto fra due interi) la quale, elevata al quadrato, dia come risultato 2

Dimostrazione

Per assurdo. Supponiamo, per assurdo, che esista una frazione la quale, elevata al quadrato, dia come risultato 2.

Detta, per fissare le idee, $\frac{m}{n}$ tale frazione, avremo: $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$.

Riduciamo la frazione m/n ai minimi termini, se già non lo è; otterremo una frazione p/q , con p e q primi fra loro

(cioè: privi di divisori comuni; in altre parole: non più semplificabili), tale che $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$.

Si potrà scrivere quindi la seguente catena di deduzioni:

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 &\rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \rightarrow p^2 = 2q^2 \rightarrow \text{il numero } p^2 \text{ è pari} \rightarrow \boxed{p \text{ è PARI}} \rightarrow \\ &\rightarrow \text{esiste un INTERO } p' \text{ tale che } p = 2p' \rightarrow (2p')^2 = 2q^2 \rightarrow 4p'^2 = 2q^2 \rightarrow q^2 = 2p'^2 \rightarrow \\ &\rightarrow \text{il numero } q^2 \text{ è pari} \rightarrow \boxed{q \text{ è PARI}} \end{aligned}$$

Ora, nel corso di tale catena abbiamo dedotto che p e q sono entrambi PARI, cioè entrambi divisibili per 2, mentre eravamo partiti dal presupposto che la frazione p/q fosse ridotta ai minimi termini, vale a dire non più semplificabile.

Ricapitoliamo: supponendo che esistesse una frazione m/n tale che $(m/n)^2=2$, siamo pervenuti a conclusioni assurde.

Non esiste perciò alcuna frazione che elevata al quadrato dia 2.

Se i due segmenti \mathbf{a} , \mathbf{u} sono incommensurabili,

non esiste dunque nessun numero razionale $\frac{m}{n}$ tale che risulti $\mathbf{a} = \frac{m}{n}\mathbf{u}$:

per qualunque numero razionale $\frac{m}{n}$, il segmento $\frac{m}{n}\mathbf{u}$,

ossia il segmento ottenuto mettendo in fila m segmenti ciascuno uguale all' n -esima parte di \mathbf{u} ,

potrà magari discostarsi pochissimo dal segmento \mathbf{a} , ma comunque NON potrà mai coincidere esattamente con \mathbf{a} !

Supponiamo che \mathbf{a} ed \mathbf{u} siano incommensurabili,

e supponiamo che, per due certi numeri razionali m/n e m'/n' ,

si abbia: $\frac{m}{n}\mathbf{u} < \mathbf{a} < \frac{m'}{n'}\mathbf{u}$.

Allora diremo che il numero razionale m/n costituisce una "misura per difetto del segmento \mathbf{a} " e che il numero razionale m'/n' costituisce una "misura per eccesso del segmento \mathbf{a} ".

E' evidente che esisteranno infiniti numeri razionali caratterizzati dal fatto di essere misure **per difetto** del segmento \mathbf{a} ;

come pure, esisteranno infiniti numeri razionali caratterizzati dal fatto di essere misure **per eccesso** di \mathbf{a} ...

... ma - ribadiamolo - se \mathbf{a} e \mathbf{u} sono incommensurabili non esiste alcun numero razionale, che abbia il diritto di essere considerato la misura **esatta** di \mathbf{a} rispetto a \mathbf{u} .

In caso di incommensurabilità di \mathbf{a} con \mathbf{u} , la misura di \mathbf{a} rispetto a \mathbf{u} sarà espressa da un numero **IRRAZIONALE**: precisamente, da quel numero irrazionale che è maggiore di tutte le misure razionali per difetto di \mathbf{a} , e minore di tutte le misure razionali per eccesso di \mathbf{a} .

NUMERI IRRAZIONALI

Un numero si dice "irrazionale" se non è esprimibile sotto forma di frazione (intesa come "rapporto fra due numeri interi").

□ Il discorso fatto sulla "misura" può essere schematizzato, in sostanza, affermando che

l' "IRRAZIONALITÀ" è "l'aspetto aritmetico dell'INCOMMENSURABILITÀ".

♪ incommensurabilità = concetto geometrico

♪ irrazionalità = concetto aritmetico (da *arithmós* = numero)

□ **Un numero irrazionale è "definito", "individuato", dalle sue "approssimazioni razionali per difetto" e dalle sue "approssimazioni razionali per eccesso".**

Ad esempio, il numero irrazionale

$$\sqrt{2} = 1,414213562373095\dots$$

è definito come "quell'entità numerica che è

maggiore di 1 ma minore di 2;

maggiore di 1,4 ma minore di 1,5;

maggiore di 1,41 ma minore di 1,42;

ecc. ecc."

□ Esistono infiniti numeri razionali, ed esistono pure infiniti numeri irrazionali, ma, in un certo senso,

i numeri irrazionali sono "più infiniti ancora" dei razionali (la loro "numerosità" ha un "grado di infinito" maggiore).

Se io "pesco a caso" un punto su di una *number line*,

normalmente la sua ascissa sarà *irrazionale*;

sì, certo, potrebbe anche capitarmi di "beccare" un punto con ascissa *razionale*,

ma la probabilità che ciò accada è *infinitamente piccola* !!!!!

Straordinario ...

Se vuoi approfondire queste tematiche,

di cui fu geniale esploratore il matematico danese Georg Cantor (1845-1918), puoi andare alla pagina 402 di questo volume.