

7.3 - GENERALIZZIAMO IL CONCETTO DI MISURA

A) LE “CLASSI DI GRANDEZZE”

Diciamo che si può parlare di “misura” ogniqualvolta si consideri una “**classe di grandezze**”.

Cos'è dunque una “classe di grandezze” ?

Prima di rispondere astrattamente a questa domanda, avvertiamo, a titolo di esempio, che

sono classi di grandezze:

- l'insieme dei **segmenti**;
- l'insieme delle **superfici piane**;
- l'insieme degli **angoli**, se si ammette di poter anche “andare oltre il giro completo”;
- l'insieme degli **archi di una stessa circonferenza** (compresi quelli maggiori della circonferenza stessa);
- ... ecc.

E procediamo ora con la (in verità: piuttosto impegnativa) DEFINIZIONE.

Si dice “**classe di grandezze**” un insieme I di oggetti matematici nel quale

1. siano definite tre relazioni, da indicarsi coi simboli $=, <, >$

(dove s'intende che $>$ indichi la relazione inversa di $<$)

NOTA - Il simbolo $=$ potrà avere, a seconda del contesto, significati diversi: ad esempio

- nel caso dei segmenti, dire che sono $=$ significherà affermare che sono “congruenti, sovrapponibili”;
- nel caso delle superfici, $=$ avrà il significato di “equivalente”, ossia “avente la stessa estensione di” (e il simbolo $=$ verrà preferibilmente rimpiazzato dal simbolo \doteq);
- ecc. ecc.

2. sia definita un'operazione denominata “somma”, da indicarsi col simbolo $+$

(l'operazione inversa di $+$ verrà indicata con $-$)

3. e le definizioni adottate siano tali che $=, <, >, +$ soddisfino ai seguenti ASSIOMI

(“assioma” ha qui il senso di “affermazione che fa da premessa in una teoria”):

- la relazione $=$ dev'essere riflessiva, simmetrica e transitiva;
- date due qualsiasi grandezze A e B , deve verificarsi una e una sola delle tre eventualità $A=B, A<B, A>B$ (**assioma della tricotomia**);
- la relazione $<$ deve essere transitiva;
- l'operazione $+$ dev'essere “ovunque definita” (cioè, per *qualsiasi* coppia di elementi A, B di I la somma $A+B$ deve potersi effettuare, con risultato che deve appartenere anch'esso all'insieme I); dev'essere commutativa, associativa, e dotata di elemento neutro (detto “grandezza nulla”);
- per ogni grandezza A dell'insieme I , e per ogni numero naturale non nullo n , deve esistere una e una sola grandezza B tale che $nB=A$, dove nB indica il risultato della somma di n addendi $B+B+ \dots +B$. In altre parole, per ogni grandezza A dell'insieme I , e per ogni numero naturale non nullo n , deve esistere, ed essere unico, il “sottomultiplo di A secondo n ” (**assioma della divisibilità indefinita**);
- date due grandezze A, B , se A non è l'elemento neutro additivo (“grandezza nulla”) ed è $B>A$, allora deve esistere un numero naturale n , tale che $nA>B$; in altre parole, data una grandezza non nulla A e data un'altra grandezza B maggiore di A , deve esistere un multiplo di A , che sia maggiore di B (**assioma di Archimede**);
- se due sottoinsiemi I', I'' di I sono tali che ogni elemento di I' è $<$ di ogni elemento di I'' , allora esiste almeno un elemento di I , che sia \geq di tutti gli elementi di I' e \leq di tutti gli elementi di I'' (**assioma di continuità**).

B) MISURA DI UNA GRANDEZZA

“**Misurare**” una grandezza A significa **confrontarla** con un'altra grandezza U della stessa classe; quindi, con una grandezza che sia “**omogenea**” con quella da misurare (“omogenea” = “della stessa specie”).

U assumerà il ruolo di “**unità di misura**” e si tratterà di esprimere, mediante un numero reale, “**quante volte U è contenuta in A** ”.

In analogia a quanto visto coi segmenti, si vede che il procedimento di misura può condurre, a seconda dei casi:

- ad un **numero intero** (quando, sommando più grandezze tutte uguali a U , si riesce a ottenere esattamente A);
- ad una **frazione**, ovvero ad un numero razionale (quando sia necessario ricorrere ai sottomultipli di U);
- ad un **numero irrazionale** (quando accade che A e U sono “incommensurabili” ossia non ammettono alcun sottomultiplo comune).

C) RAPPORTO FRA DUE GRANDEZZE

Supponiamo che “la misura di A, rispetto a U, sia α ($\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$)”.

Allora potremo scrivere

$$A = \alpha U$$

e il numero α potrà essere chiamato, indifferentemente:

“la misura di A rispetto a U”

oppure anche

“il rapporto A/U (o A:U) fra la grandezza A e la grandezza U”.

Cos'è, dunque, il “rapporto fra due grandezze omogenee”?

E' la misura della prima grandezza, quando la seconda venga assunta come unità di misura; in altre parole, è il numero che esprime “quante volte la seconda grandezza è contenuta nella prima”.

D) IL “TEOREMA DEL RAPPORTO”

Dovendo calcolare il rapporto fra due grandezze omogenee A e B, possiamo procedere per via diretta (chiedendoci “quante volte B è contenuta in A”),

oppure per via indiretta, andando a misurare sia A che B rispetto ad una terza grandezza U,

che faccia da unità di misura comune, poi eseguendo il quoziente fra le due misure così ottenute.

Vale infatti (noi ci limitiamo ad enunciarlo, omettendo la dimostrazione) il seguente fondamentale

TEOREMA (“del rapporto”):

Il rapporto A/B o A:B fra due grandezze omogenee A e B, è uguale

al quoziente fra le loro misure, calcolate rispetto ad una qualsivoglia unità di misura comune U.

In pratica.

Supponiamo che un pensionato sia abituato a utilizzare il suo bastone da passeggio per calcolare le lunghezze, e abbia constatato che il rapporto fra la lunghezza L del campo da bocce e la lunghezza B del bastone è 8,5 (perché “il bastone ci sta esattamente 8 volte e mezzo nel campo da bocce”).

Bene! Allora quel pensionato, qualora andasse a misurare sia il campo da bocce che il bastone in metri, e facesse poi la divisione fra le due misure in metri ottenute, troverebbe come risultato ancora 8,5.

E) CLASSI DI GRANDEZZE IN CORRISPONDENZA BIUNIVOCA

Si dice che due insiemi sono in “**corrispondenza biunivoca**”

se è stata fissata una legge che faccia corrispondere ad ogni elemento del primo insieme, uno e un solo elemento del secondo insieme, E VICEVERSA.

Ad esempio, in una camicia, l'insieme delle asole e l'insieme dei bottoni sono in corrispondenza biunivoca: ad ogni asola corrisponde uno e un sol bottone e viceversa ad ogni bottone corrisponde una e una sola asola.

In Geometria non è raro imbattersi in casi in cui c'è una corrispondenza biunivoca che lega fra loro due “classi di grandezze”.

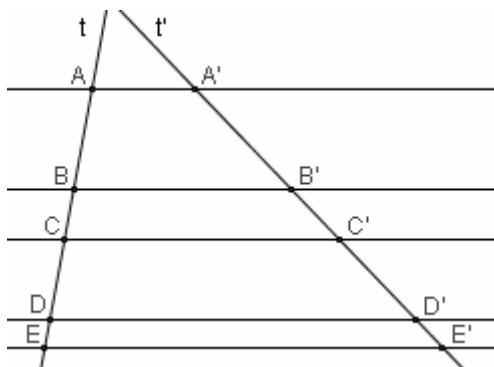
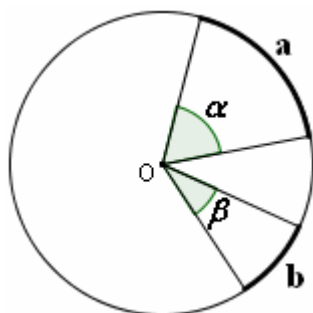
Ad esempio, presa una circonferenza Γ , possiamo considerare l'insieme A dei suoi angoli al centro (insieme A che costituisce, a patto di includervi anche gli angoli maggiori di un angolo giro, una “classe di grandezze”) e l'insieme A' dei suoi archi (anche A', se vi includiamo pure gli archi maggiori dell'intera circonferenza, è una classe di grandezze).

I due insiemi A e A' sono, com'è evidente, in corrispondenza biunivoca:

ad ogni angolo al centro corrisponde uno ed un solo arco, e ad ogni arco corrisponde uno e un solo angolo al centro.

Altro esempio.

Quando un fascio di parallele è tagliato da due trasversali t e t' , si stabilisce una corrispondenza biunivoca fra l'insieme S dei segmenti giacenti su t (S è una classe di grandezze, “sottoclasse” della più generale classe di tutti i segmenti del piano) e l'insieme S' dei segmenti che giacciono su t' .



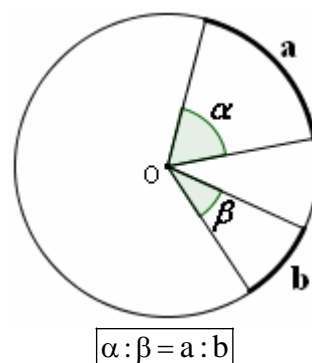
F) CLASSI DI GRANDEZZE DIRETTAMENTE PROPORZIONALI

Quando abbiamo due classi di grandezze, una classe G e un'altra classe G' , legate fra loro da una corrispondenza biunivoca, diremo che G e G' sono “direttamente proporzionali” se accade che il rapporto fra due qualsivoglia grandezze della classe G , è uguale al rapporto delle grandezze che ad esse corrispondono in G' .

Preso una circonferenza Γ , consideriamo la classe degli angoli al centro e la classe degli archi (classi che, come abbiamo osservato, sono in corrispondenza biunivoca fra loro).

Supponiamo che l'angolo α sia il doppio di β così che il rapporto $\alpha : \beta$ sia 2. Allora si capisce (e si dimostra con facilità) che l'arco a corrispondente ad α sarà il doppio dell'arco b corrispondente a β , cosicché anche $a : b = 2$. E, al di là del particolare esempio fatto, è intuitivo che, presi due qualsivoglia angoli al centro α, β e detti a, b i corrispondenti archi, varrà sempre la proporzione $\alpha : \beta = a : b$.

Insomma, l'intuizione ci dice che gli angoli al centro in una data circonferenza, e gli archi di quella stessa circonferenza, sono due classi di grandezze direttamente proporzionali



Dunque, due classi di grandezze G e G' in corrispondenza biunivoca fra loro sono direttamente proporzionali quando, prese due qualunque grandezze A, B in G , e considerate le rispettive corrispondenti A' e B' in G' , si ha sempre $A : B = A' : B'$

o, se si preferisce, quando sussiste l'implicazione $\frac{A}{B} = \alpha \Rightarrow \frac{A'}{B'} = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0$)

In altre parole ancora, affinché due classi di grandezze G e G' , in corrispondenza biunivoca fra loro, siano direttamente proporzionali, deve accadere che

se A è il doppio di B , allora la grandezza A' (corrispondente di A) è il doppio della grandezza B' (che corrisponde a B);
se A è il triplo di B , allora la grandezza A' (corrispondente di A) è il triplo della grandezza B' (che corrisponde a B);

...

anzi, in termini del tutto generali, deve accadere che, se $A = \alpha B$, allora $A' = \alpha B'$ (α numero reale non negativo).

G) IL “CRITERIO DI PROPORZIONALITA’”

Una cosa è INTUIRE che due certe classi di grandezze in corrispond. biunivoca siano direttamente proporzionali, un'altra cosa è DIMOSTRARLO. A tale scopo, si utilizza di solito un teorema del tutto generale il quale assicura, se sono verificate determinate condizioni, il sussistere della diretta proporzionalità.

Vediamo l'enunciato di questo teorema, pur omettendone la dimostrazione

(che è piuttosto impegnativa, perché deve tenere conto della possibilità, per due grandezze della stessa specie, di essere incommensurabili, quindi di avere come rapporto un numero irrazionale).

TEOREMA (“Criterio di Proporzionalità”)

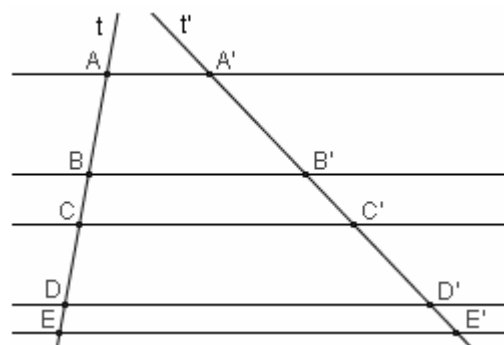
Se due classi di grandezze G, G' sono in corrispondenza biunivoca, e accade che:

- i) $A = B \Rightarrow A' = B'$ ossia:
a due grandezze che sono uguali in G corrispondono sempre due grandezze, che sono uguali in G'
- ii) $A = B + C \Rightarrow A' = B' + C'$ cioè :
ad una grandezza A , in G , che sia la somma di due altre grandezze, corrisponde sempre, in G' , quella grandezza A' , che è la somma delle rispettive corrispondenti

allora quelle due classi di grandezze sono direttamente proporzionali.

Ad esempio, la proporzionalità fra gli angoli al centro e gli archi in una stessa circonferenza, che abbiamo dato per scontata per intuizione, può essere dimostrata rigorosamente come conseguenza del precedente Criterio (in quanto è noto che in una stessa circonferenza ad angoli al centro uguali corrispondono archi uguali, ed è evidente che ad un angolo al centro, che sia somma di altri due, corrisponde proprio quell'arco, che è la somma dei due archi corrispondenti ai due angoli che fanno da addendi nella somma).

Anche l'importantissimo Teorema di Talete (“Quando un fascio di rette parallele viene tagliato da due trasversali, i segmenti staccati dalle parallele sulle trasversali sono proporzionali”), di cui parleremo al successivo capitolo 9, viene giustificato in base al Criterio di Proporzionalità sopra citato.



$AB : CD = A'B' : C'D'$
TEOREMA DI TALETE