Cap. 8: EQUIVALENZE; I TEOREMI DI EUCLIDE E DI PITAGORA

8.1 - L’EQUIVALENZA DELLE SUPERFICI PIANE

- Una “**superficie piana**” è una porzione di piano, limitata da una linea chiusa:
  ad esempio, sono superfici piane i poligoni, o i cerchi.
- L’ “**estensione**” di una superficie piana è “la quantità di piano occupata dalla superficie”.

  “Superficie” ed “estensione” sono “concetti primitivi”,
  la cui descrizione è insita implicitamente negli assiomi che ad essi si riferiscono.

Due superfici con uguale estensione sono dette “**equivalenti**”.

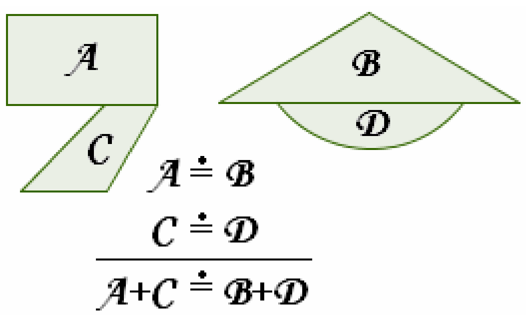
Se prendiamo una lamiera di metallo e ritagliamo da essa due porzioni di ugual peso,
avremo l’idea di due superfici equivalenti.
Ancora: l’imbianchino che impieghi la stessa quantità di vernice per pitturare due diverse pareti,
ha verniciato due superfici equivalenti.

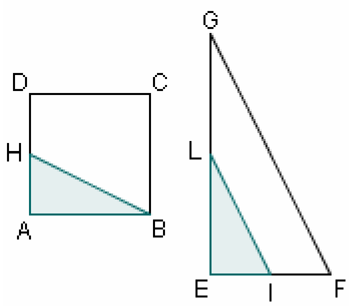
Il simbolo che utilizzeremo per indicare equivalenza sarà un “uguale, col puntino sopra”: $\doteq$

ASSIOMI della relazione di “equivalenza fra superfici piane”

1. **Due superfici uguali** (= congruenti) **sono equivalenti**
2. **L’equivalenza delle superfici piane gode delle tre proprietà riflessiva, simmetrica, transitiva**
   - PROPRIETA' RIFLESSIVA $\forall \mathbf{A},\quad \mathbf{A} \doteq \mathbf{A}$
     Ogni superficie è equivalente a sé stessa
   - PROPRIETA' SIMMETRICA $\mathbf{A} \doteq \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B} \doteq \mathbf{A}$
     Se una superficie $\mathbf{A}$ è equivalente ad una superficie $\mathbf{B}$, allora anche $\mathbf{B}$ è equivalente ad $\mathbf{A}$
   - PROPRIETA' TRANSITIVA $(\mathbf{A} \doteq \mathbf{B} \wedge \mathbf{B} \doteq \mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{A} \doteq \mathbf{C}$
     Se una superficie $\mathbf{A}$ è equivalente ad una superficie $\mathbf{B}$,
     e la superficie $\mathbf{B}$ a sua volta è equivalente ad una superficie $\mathbf{C}$,
     allora $\mathbf{A}$ è equivalente a $\mathbf{C}$:
     In altre parole, due superfici equivalenti ad una terza sono equivalenti fra loro.
3. **Somme, o differenze, di superfici equivalenti (in particolare: uguali), sono equivalenti**

   NOTA. *Per “somma” di due superfici, intendiamo la superficie “totale”.*
   Per poter essere “sommate”, due superfici devono essere prive di intersezione, o, al più,
   avere in comune soltanto punti del contorno.
   Per sommare due superfici S ed S’ che siano parzialmente sovrapposte, così da avere in comune
   anche dei punti interni ai contorni, occorre sostituire ad una di esse (es. S’)
   una superficie congruente, o equivalente, disposta in modo tale da poter essere sommata con S.

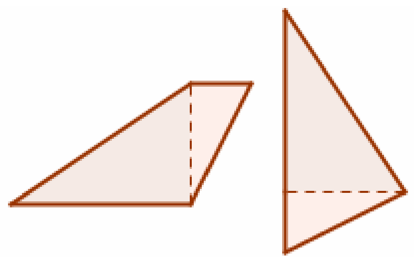




$$ABCD \doteq EFG$$
$$ABH \doteq EIL$$
$$\underbrace{ABCD - ABH}_{BCDH} \doteq \underbrace{EFG - EIL}_{IFGL}$$

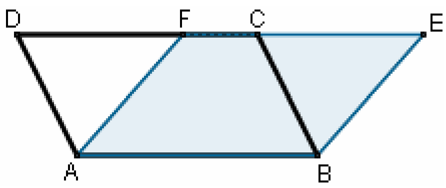
COROLLARIO
dell’assioma 3:

due superfici equiscomponibili (ossia: scomponibili in parti rispettivamente uguali) sono equivalenti



Ad esempio, sono equivalenti il trapezio e il triangolo in figura, perché scomponibili in triangoli rispettivamente uguali

TEOREMA. **Due parallelogrammi aventi ugual base e uguale altezza sono equivalenti**



IPOTESI

ABCD, ABEF parallelogrammi
con ugual base e uguale altezza

TESI $ABCD \doteq ABEF$

DIM.

I due triangoli ADF, BCE sono uguali per il Primo Criterio perché hanno: AD = BC (lati opposti di un parallelogrammo); AF = BE (stesso motivo); $D\hat{A}F = C\hat{B}E$ (angoli coi lati paralleli e concordi). Quindi:

$$ABED \doteq ABED \text{ (ogni superficie è equivalente a sé stessa : assioma 2, proprietà riflessiva dell'equivalenza)}$$

$$ADF \doteq BCE \quad \text{(due superfici uguali sono anche equivalenti : assioma 1)}$$

$$\overline{\underbrace{ABED - ADF}_{ABEF} \doteq \underbrace{ABED - BCE}_{ABCD}}$$

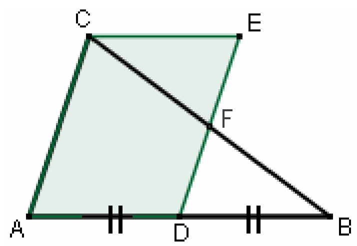
Vuoi sapere perché abbiamo preferito ragionare per differenza anziché per somma? Clicca qui: ⇨

COROLL. **Un parallelogrammo è equivalente ad un rettangolo avente ugual base e uguale altezza**

NOTA 1 – Il corollario appena enunciato autorizza a calcolare l'**area di un parallelogrammo** tramite la **stessa formula che consente di calcolare l'area di un rettangolo:**

$\boxed{S_{RETT.} = b \cdot h}$ (vedi a questo proposito il precedente capitolo "Misura delle Grandezze").

TEOREMA. **Un triangolo è equivalente a un parallelogrammo avente base uguale a metà base del triangolo, e per altezza la stessa altezza**



IPOTESI:

ABC triangolo

ADEC parallelogrammo con $AD = \frac{1}{2}AB$, e stessa altezza di ABC

TESI

$ABC \doteq ADEC$

DIM.

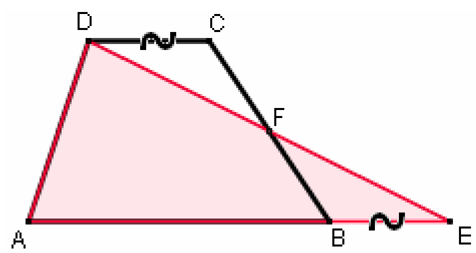
I due triangoli DBF, EFC sono uguali per il Secondo Criterio (due parallele, alterni interni, DB=AD=CE).
Possiamo allora scrivere la catena $ABC = ADFC + DBF \doteq ADFC + EFC = ADEC$, che dimostra la tesi.

NOTA 2 – Combinando questo teorema con la NOTA 1 si ha la

formula per l'area di un triangolo: $\boxed{S_{TRIANG.} = \frac{1}{2} b \cdot h = \frac{b \cdot h}{2}}$

COROLLARIO. **Due triangoli con ugual base e uguale altezza sono equivalenti**

TEOREMA. **Un trapezio è equivalente a un triangolo avente base uguale alla somma delle basi del trapezio, e per altezza la stessa altezza**



IPOTESI

ABCD trapezio

BE = DC,

così che il triangolo AED abbia base uguale alla somma delle basi del trapezio, e per altezza la stessa altezza del trapezio

TESI

$ABCD \doteq AED$

DIM.

I due triangoli FCD e FBE sono uguali per il Secondo Criterio. Ne consegue

$ABCD = ABFD + FCD \doteq ABFD + FBE = AED$, c.v.d.

NOTA 3 - Questo teorema, insieme con la formula di cui alla NOTA 2, giustifica la

formula per l'area di un trapezio: $\boxed{S_{TRAP.} = \frac{(BASE\ MAGG. + base\ min.) \cdot altezza}{2} = \frac{(B+b) \cdot h}{2}}$