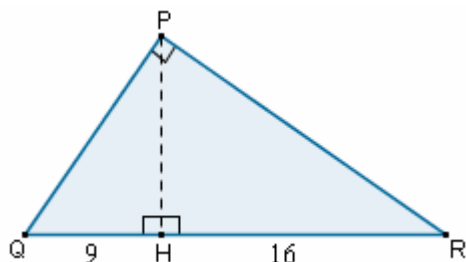


**ESEMPI NUMERICI, ESERCIZI SUI TEOREMI DI EUCLIDE E DI PITAGORA**

- a) In un triangolo rettangolo PQR, di ipotenusa QR, le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa misurano rispettivamente 9 cm e 16 cm. Determinare perimetro e area del triangolo.



$$\widehat{QPR} = 90^\circ$$

$$PH \perp QR$$

$$QH = 9 \text{ cm}, HR = 16 \text{ cm}$$

$$2p(\text{PQR}) = ?$$

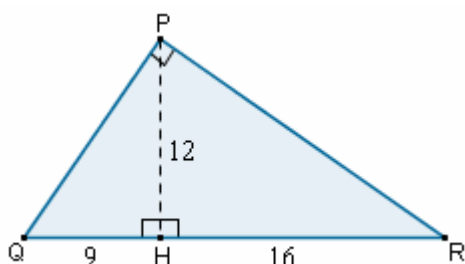
$$S(\text{PQR}) = ?$$

Il fatto che siano note le misure delle proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa ci fa venire in mente il 2° Teorema di Euclide, del quale sono "protagoniste" tali due proiezioni, insieme con l'altezza relativa all'ipotenusa. Dunque

$$\boxed{PH^2 = QH \cdot HR} \quad (\text{Euclide } 2^\circ, \text{PQR})$$

e da qui ricaviamo

$$\boxed{PH = \sqrt{QH \cdot HR}} \underset{\text{NOTA 1}}{=} \sqrt{9 \cdot 16} \underset{\text{NOTA 2}}{=} \sqrt{144} \underset{\text{NOTA 3}}{=} 12 \text{ cm}$$



NOTA 1 Ovviamente, davanti alla radice non mettiamo il doppio segno  $\pm$  perché il valore negativo non avrebbe senso in questo contesto.

NOTA 2 Anche:  $\sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = 3 \cdot 4 = 12$

NOTA 3 L'unità di misura, a stretto rigore, andrebbe scritta ad ogni passaggio della catena; noi, per brevità, la mettiamo solo nel passaggio finale.

Ora possiamo ricavare il cateto PQ:

- ♫ applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo PHQ:

$$\boxed{PQ^2 = QH^2 + PH^2} \quad (\text{Pitagora, PHQ})$$

da cui

$$\boxed{PQ = \sqrt{QH^2 + PH^2}} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15 \text{ cm}$$

- ♫ oppure applicando il 1° Teorema di Euclide al triangolo rettangolo PQR:

$$\boxed{PQ^2 = QR \cdot QH} \quad (\text{Euclide } 1^\circ, \text{PQR}), \text{ da cui}$$

$$\boxed{PQ = \sqrt{QR \cdot QH}} = \sqrt{(9+16) \cdot 9} = \sqrt{25 \cdot 9} = \sqrt{225} = 15 \text{ cm}$$

E possiamo ricavare il cateto PR:

- ♫ applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo PHR:

$$\boxed{PR^2 = HR^2 + PH^2} \quad (\text{Pitagora, PHR})$$

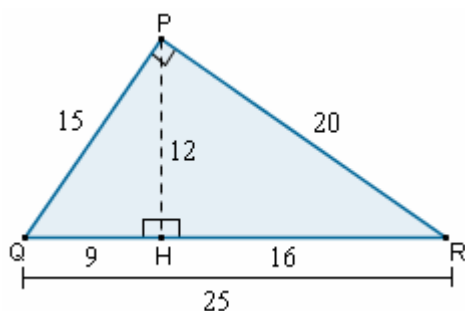
da cui

$$\boxed{PR = \sqrt{HR^2 + PH^2}} = \sqrt{16^2 + 12^2} = \sqrt{256 + 144} = \sqrt{400} = 20 \text{ cm}$$

- ♫ oppure applicando il 1° Teorema di Euclide al triangolo rettangolo PQR:

$$\boxed{PR^2 = QR \cdot HR} \quad (\text{Euclide } 1^\circ, \text{PQR}), \text{ da cui}$$

$$\boxed{PR = \sqrt{QR \cdot HR}} = \sqrt{(9+16) \cdot 16} = \sqrt{25 \cdot 16} = \sqrt{400} = 20 \text{ cm}$$

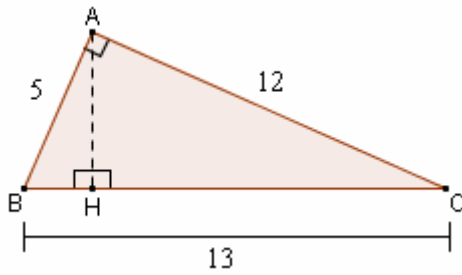


$$\boxed{2p(\text{PQR})} = PQ + QR + PR = 15 + 25 + 20 = \boxed{60 \text{ cm}}$$

$$\boxed{S(\text{PQR})} = \frac{QR \cdot PH}{2} = \frac{25 \cdot 12}{2} = \boxed{150 \text{ cm}^2}$$

$$\text{oppure } S(\text{PQR}) = \frac{PQ \cdot PR}{2} = \frac{15 \cdot 20}{2} = 150 \text{ cm}^2$$

- b) In un triangolo rettangolo i cui lati misurano 5, 12 e 13, quali sono le misure delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa? E dell'altezza relativa all'ipotenusa?



$$\boxed{AB^2 = BC \cdot BH} \quad (\text{Euclide } 1^\circ, ABC)$$

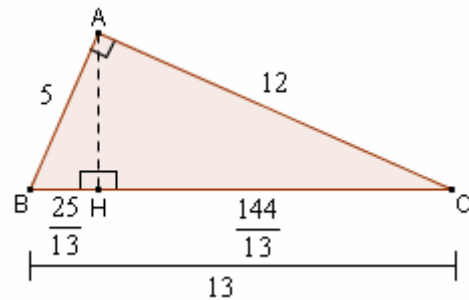
$$BC \cdot BH = AB^2 \quad (\text{scambiando i membri})$$

$$\boxed{BH = \frac{AB^2}{BC}} = \frac{5^2}{13} = \frac{25}{13} \text{ cm}$$

$$HC = BC - BH = 13 - \frac{25}{13} = \frac{144}{13} \text{ cm}$$

$$\boxed{AH^2 = BH \cdot HC} \quad (\text{Euclide } 2^\circ, ABC)$$

$$\boxed{AH = \sqrt{BH \cdot HC}} = \sqrt{\frac{25}{13} \cdot \frac{144}{13}} = \sqrt{\frac{5^2 \cdot 12^2}{13^2}} = \frac{5 \cdot 12}{13} = \frac{60}{13} \text{ cm}$$



**In alternativa** (con calcoli, però, più pesanti)

si sarebbe potuta calcolare immediatamente l'altezza relativa all'ipotenusa mediante la formula

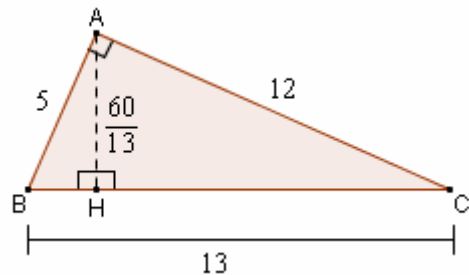
$$\boxed{\text{altezza} = \frac{\text{doppia area}}{\text{ipotenusa}} = \frac{\text{prodotto cateti}}{\text{ipotenusa}}}$$

$$AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{5 \cdot 12}{13} = \frac{60}{13} \text{ cm}$$

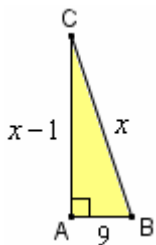
per poi ricavare le proiezioni con Pitagora:

$$\boxed{BH^2 + AH^2 = AB^2} \quad (\text{Pitagora, ABH})$$

$$BH^2 = AB^2 - AH^2, \quad \boxed{BH = \sqrt{AB^2 - AH^2}} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{60}{13}\right)^2} = \dots = \sqrt{\frac{625}{169}} = \frac{25}{13} \text{ cm}$$



- c) In un triangolo rettangolo, un cateto misura metri 9, e l'altro cateto è inferiore di 1 metro all'ipotenusa. Determina tutti i lati del triangolo.



$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$\boxed{9^2 + (x-1)^2 = x^2}$$

$$81 + x^2 - 2x + 1 = x^2$$

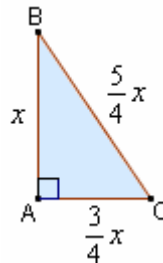
$$-2x = -82; \quad x = 41$$

$$BC = 41 \text{ m}, \quad AC = 40 \text{ m}$$

**In questo problema, Pitagora è stato utilizzato per impostare l'equazione risolvente.**

*INUTILE, IN CASI SIMILI, SCOMODARE formule inverse o RADICI QUADRATE: quando si desidera scrivere un'uguaglianza contenente  $x$  che serva da equazione risolvente, basta a tale scopo la relazione pitagorica "originaria".*

- d) In un triangolo rettangolo, i cateti sono uno  $\frac{3}{4}$  dell'altro e il perimetro misura  $36a$ . Determinare l'area.



$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 + \left(\frac{3}{4}x\right)^2} = \dots = \frac{5}{4}x$$

$$x + \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}x = 36a \quad \dots \quad x = 12a$$

$$AC = \frac{3}{4}x = \frac{3}{4} \cdot 12a = 9a$$

$$S = \frac{AC \cdot AB}{2} = \frac{9a \cdot 12a}{2} = 54a^2$$

**In questo problema, dunque, il teorema di Pitagora è stato impiegato per esprimere un segmento in funzione di  $x$ .**