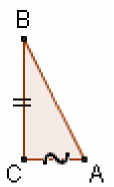
L'INVERSO DEL TEOREMA DI PITAGORA

Se in un triangolo
la somma dei quadrati costruiti su due lati
è equivalente al quadrato costruito sul terzo lato,
allora il triangolo è rettangolo
(e ha il terzo lato come ipotenusa)



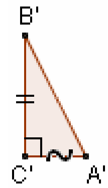
IPOTESI
$q(AC)+q(BC) \doteq q(AB)$

TESI
ABC è rettangolo, con ipotenusa AB

L'inverso del Teorema di Pitagora enunciato in FORMA ARITMETICA:

Se in un triangolo
la somma dei quadrati di due lati
("quadrato" nel senso di
"misura elevata alla seconda")
è uguale al quadrato del terzo lato,
allora il triangolo è rettangolo
e ha il terzo lato come ipotenusa

DIM. Si considera (fig. qui a destra) un angolo retto $\hat{C}'$,
e sui suoi lati si prendono due segmenti $A'C' = AC$ e $B'C' = BC$.
Si congiunge poi A' con B', ottenendo così un triangolo rettangolo $A'B'C'$.
L'obiettivo è a questo punto di dimostrare che i due triangoli $A'B'C'$ e ABC sono uguali:
con ciò resterà infatti provato che anche ABC, al pari di $A'B'C'$, è rettangolo.
Ora, ABC e $A'B'C'$ hanno già uguali, per costruzione, due lati:
se riuscissimo a far vedere che hanno uguale anche il lato rimanente, saremmo a posto,
perché potremmo invocare il 3° Criterio.
E in effetti, si ha:



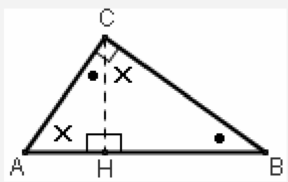
$$q(A'B') \underset{\substack{\text{perché}\\ A'B'C'\\ \text{è rettangolo}\\ \text{per costruzione}}}{\doteq} q(A'C')+q(B'C') \underset{\substack{\text{perché}\\ A'C'=AC,\\ B'C'=BC\\ \text{per costruzione}}}{\doteq} q(AC)+q(BC) \underset{\substack{\text{per}\\ \text{ipotesi}}}{\doteq} q(AB).$$

Ma se $q(A'B') \doteq q(AB)$, ne consegue $A'B' = AB$!
Possiamo dunque davvero concludere che i due triangoli ABC, $A'B'C'$ sono uguali per il 3° Criterio,
c.v.d.

♥ **E' giusto dire che un triangolo coi lati di 3, 4 e 5 cm è rettangolo "per il Teorema di Pitagora"?**
Beh, no, perché dovremmo dire invece "per l'INVERSO del Teorema di Pitagora"!
Tuttavia, se per "Teorema di Pitagora" intendiamo
quel *doppio* enunciato che consta del teorema diretto e del suo inverso,
l'espressione verbale ritorna ad essere accettabile.

I TEOREMI DI EUCLIDE "RITROVATI PER SIMILITUDINE"

♥ A distanza di tempo, potresti avere difficoltà a ricordare gli enunciati dei due Teoremi di Euclide.
Se ciò accadesse, tieni conto della possibilità di ricostruirli utilizzando le Similitudini,
che saranno oggetto di studio in un capitolo successivo.



E' ben noto che quando, in un triangolo rettangolo,
si traccia l'altezza relativa all'ipotenusa,
si ottengono tre triangoli rettangoli (compreso quello di partenza),
dotati della proprietà di avere gli angoli rispettivamente uguali.
Ora, si dimostra (teoria delle Similitudini),
che quando due triangoli hanno gli angoli ordinatamente uguali,
allora sono "simili", ossia hanno anche i lati in proporzione
(in pratica, sono "uno l'ingrandimento dell'altro").
I lati che si corrispondono nella proporzione
sono quelli che stanno opposti ad angoli uguali.

Dunque, con riferimento alla figura:

- $ACH \underset{\text{simile con}}{\sim} ABC \to AH : AC = AC : AB \to AC^2 = AH \cdot AB$ (1° Teorema di Euclide)
- $ACH \underset{\text{simile con}}{\sim} CHB \to AH : CH = CH : HB \to CH^2 = AH \cdot HB$ (2° Teorema di Euclide)

TERNE PITAGORICHE

Una "terna pitagorica" è una terna di numeri naturali tutti non nulli a, b, c tali che

$$\boxed{\mathbf{a^2+b^2=c^2}}$$

Esempi:

3	4	5
5	12	13
8	15	17
7	24	25
20	21	29
...	...	...

Un programmino che dà un elenco delle terne pitagoriche ⇨

E' evidente che una terna "pitagorica" prende questo nome dal fatto che i suoi termini possono essere interpretati come le misure dei tre lati di un triangolo rettangolo.

Infatti **il Teorema di Pitagora** afferma (nella sua lettura "aritmetica") che
**"in un triangolo rettangolo,
la somma dei quadrati** (NOTA) **dei cateti è uguale al quadrato dell'ipotenusa"**

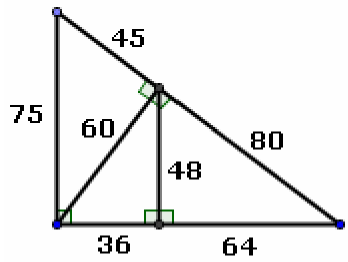
mentre **il suo inverso** afferma che
"se in un triangolo la somma dei quadrati (NOTA) **di due lati è uguale al quadrato del terzo lato, allora il triangolo è rettangolo e ha il terzo lato come ipotenusa"**

NOTA: "quadrato" nel senso di "misura elevata alla seconda"

- **Se si prendono i tre termini a, b, c di una terna pitagorica e li si moltiplica per uno stesso numero naturale maggiore di 1, si ottiene un'altra terna pitagorica.**

  infatti $\mathbf{a^2+b^2=c^2} \leftrightarrow k^2(a^2+b^2)=k^2c^2 \leftrightarrow k^2a^2+k^2b^2=k^2c^2 \leftrightarrow (\mathbf{ka})^2+(\mathbf{kb})^2=(\mathbf{kc})^2$

  vale a dire: se **(a, b, c)** è una terna pitagorica,
  allora anche **(ka, kb, kc)** lo è, e viceversa.
  Ad esempio, dalla terna $(3\ \ 4\ \ 5)$ si generano tutte le "figlie"
  $(6\ \ 8\ \ 10), (9\ \ 12\ \ 15), (12\ \ 16\ \ 20), (15\ \ 20\ \ 25), (18\ \ 24\ \ 30), (21\ \ 28\ \ 35), \ldots$



*Verifica che dalla figura ↑
si possono trarre
5 terne pitagoriche.*

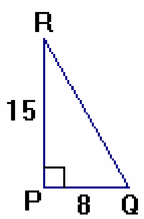
- **Diremo che una terna pitagorica è "primitiva" o "fondamentale" se i suoi tre termini sono "primi fra loro",**
  ossia non hanno divisori comuni
  (= il loro Massimo Comun Divisore è 1),
  altrimenti parleremo di terna "derivata".

- **Per scoprire nuove terne pitagoriche**
  possiamo anche sfruttare delle IDENTITÀ algebriche:
  ad esempio, per le tre espressioni n^2-p^2; $2np$; n^2+p^2
  vale l'identità $(n^2-p^2)^2+(2np)^2=(n^2+p^2)^2$ (verificalo!)
  quindi, **se attribuiamo alle lettere n, p valori interi a nostro piacere,**
  la terna $\mathbf{(n^2-p^2,\ 2np,\ n^2+p^2)}$ **sarà SEMPRE una terna pitagorica.**

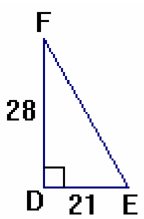
*Verifica che
(2001 2002000 2002001)
è una terna pitagorica.
Suggerimento utile:
controlla che sia*
$a^2=c^2-b^2=(c+b)(c-b)$

- Tante cose si potrebbero aggiungere; qui ci accontentiamo di rilevare un aspetto molto "pratico":
  se sono noti 2 lati di un dato triangolo rettangolo, e si osserva che le loro misure coincidono con i termini che hanno ugual posto in una terna pitagorica nota, allora la determinazione del lato rimanente sarà immediata !!!

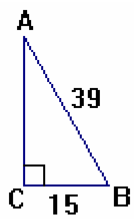
  Esempi:



Qui possiamo subito dire,
se ricordiamo la terna
$(8, 15, 17)$,
che $QR=17$.



Se osserviamo che
$21=3\cdot 7$; $28=4\cdot 7$
capiamo di trovarci di fronte
alla terna pitagorica
$(3, 4, 5)$ moltiplicata per 7,
e concludiamo immediatamente che
$EF=5\cdot 7=35$



Se osserviamo che
$39=13\cdot 3$; $15=5\cdot 3$
e ricordiamo la terna pitagorica
fondamentale $(5, 12, 13)$
avremo subito,
senza dover fare calcoli,
$AC=12\cdot 3=36$

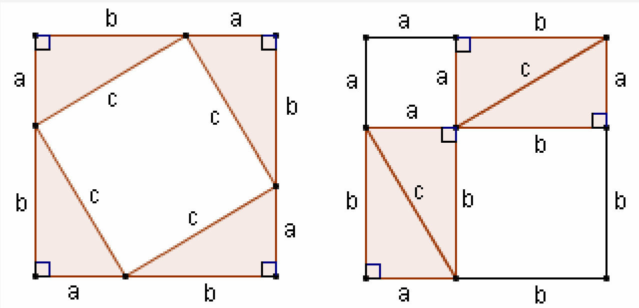
PITAGORA: STORIA, APPROFONDIMENTI DAL SITO DEL PROF. PEIRETTI

Sul bellissimo sito http://www2.polito.it/didattica/polymath/
(progetto Polymath, dedicato alla bellezza della matematica), troviamo, fra le tante cose interessanti, queste splendide lezioni su Pitagora e il suo Teorema a cura del professor Federico Peiretti di Torino: ⇨

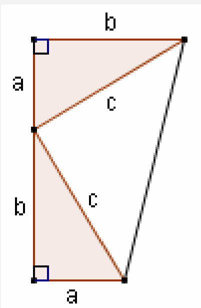
LE TANTE DIMOSTRAZIONI ALTERNATIVE DEL TEOREMA DI PITAGORA

Del Teorema di Pitagora sono state escogitate tantissime dimostrazioni alternative.
Il sito www.cut-the-knot.org, in questa pagina ⇨, ne riporta più di 100!!!

Ecco qui di seguito tre possibili modalità di dimostrazione del teorema.



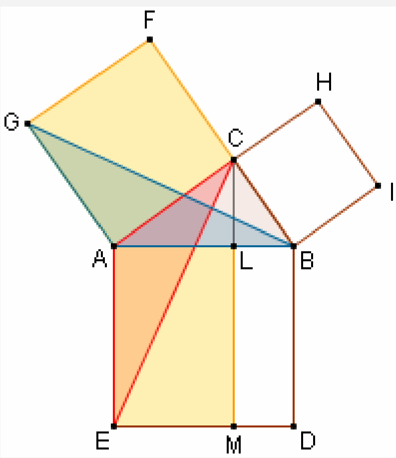
In questa dimostrazione vengono indicate con a, b, c le misure dei tre lati del triangolo rettangolo.
Nella prima figura quattro copie del triangolo sono state disposte in modo tale da lasciare in mezzo una regione vuota, che si può dimostrare facilmente essere quadrata.
Nella figura a fianco le stesse quattro mattonelle triangolari sono state posate in maniera differente.
Ma i due quadratoni più grossi sono uguali (il loro lato è, in entrambi i casi, a+b)
e quindi hanno la stessa estensione anche le regioni bianche che rappresentano, nei due casi,
la differenza fra i due quadratoni uguali e la superficie formata dalle quattro mattonelle triangolari.
Segue la tesi: $c^2 = a^2 + b^2$



La figura qui a fianco si riferisce ad una dimostrazione trovata da Garfield (1831-1881), un presidente degli Stati Uniti che si dilettava di matematica.
Due copie di un triangolo rettangolo di lati a, b, c sono state disposte in modo che, tracciata una congiungente, si formasse un trapezio rettangolo.
Poiché gli angoli acuti di un triangolo rettangolo sono fra loro complementari, ne deriva che il triangolo bianco ha un angolo di 180°–90°=90°.
Se calcoliamo l'area del trapezio in due modi differenti, avremo

$$S = \frac{(a+b)(a+b)}{2} = \frac{(a+b)^2}{2} \quad \text{ma anche} \quad S = \cancel{2} \cdot \frac{ab}{\cancel{2}} + \frac{c \cdot c}{2} = ab + \frac{c^2}{2}$$

$$\text{e quindi} \quad \frac{(a+b)^2}{2} = ab + \frac{c^2}{2} \quad \text{da cui} \quad \frac{a^2 \cancel{+2ab} + b^2}{\cancel{2}} = \frac{\cancel{2ab} + c^2}{\cancel{2}} \quad \text{c.v.d.}$$



La figura a sinistra riporta la dimostrazione che si trova negli "Elementi", il più famoso testo di geometria di tutti i tempi, scritto da Euclide intorno al 300 a. C.
Il triangolo rett. di partenza è ABC (l'angolo retto è quello di vertice C);
ABDE, ACFG, BCHI sono i tre quadrati costruiti sui lati
mentre CL è l'altezza relativa all'ipotenusa, poi prolungata in LM.
Tracciate le congiungenti BG e CE, possiamo osservare che
il quadrato ACFG è equivalente alla metà del triangolo ABG
(infatti il quadrato e il triangolo hanno la stessa base AG e uguale altezza)
mentre il rettangolo ALME è equivalente alla metà del triangolo ACE
(stessa base AE e uguale altezza).
Ma i due triangoli ABG e ACE sono uguali per il 1° Criterio
(i due loro angoli di vertice A sono uguali a 90° + uno stesso angolo)
perciò è $ACFG \doteq ALME$;
e analogamente si potrebbe far vedere che è $BCHI \doteq LBDM$.
Sommando si ha $ACFG + BCHI \doteq ALME + LBDM = ABDE$ c.v.d.