

GEOMETRIA Cap. 9: SIMILITUDINI

Per comodità del lettore riportiamo alcune nozioni di base sulle proporzioni già esposte nel Volume 1.

9.1 - PROPORZIONI

Si dice "**proporzione**" un'uguaglianza fra due rapporti (= quozienti).

Esempio

$$12 : 16 = 15 : 20$$

Questa proporzione è corretta, perché effettivamente i due rapporti (=quozienti) 12:16 e 15:20 sono uguali fra loro (valgono entrambi $\frac{3}{4}$, o, se si preferisce: 0,75).

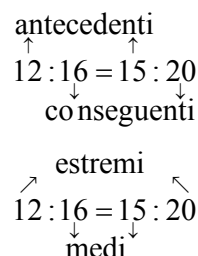
Di solito si legge "**12 sta a 16 come 15 sta a 20**", proprio per evidenziare il fatto che si va a confrontare il "peso di un numero rispetto all'altro": 12, nei confronti di 16, è $\frac{3}{4}$ e quindi è proprio come 15 nei confronti di 20.

ESERCIZI (risposte più avanti in questa pagina)

- Quanto deve valere x se si vuole che la proporzione $24 : 12 = x : 11$ sia corretta?
- Quanto deve valere y se si vuole che la proporzione $5 : 15 = y : 18$ sia corretta?
- Quanto deve valere z se si vuole che la proporzione $6 : 4 = 30 : z$ sia corretta?

Un po' di **terminologia**. In una proporzione,

- i due dividendi (cioè: il 1° e il 3° termine) si dicono "**antecedenti**";
- i due divisori (cioè: il 2° e il 4° termine) si dicono "**consequenti**";
- il 1° e il 4° termine si dicono "**estremi**";
- il 2° e il 3°, "**medi**".



Risposte agli esercizi di questa pagina

- Il quoziente 24:12 vale 2, quindi anche il quoziente $x:11$ dovrà valere 2, e ciò avviene a condizione che x sia uguale a 22.
Anche: così come 24 è il doppio di 12, altrettanto x dovrà essere il doppio di 11 da cui $x=22$.
- Così come 5 è la terza parte di 15, anche y dovrà essere la terza parte di 18. Perciò $y=6$.
- $6:4=1,5$ ossia il 6 è 1 volta e mezza il 4. Il 30 è una volta e mezza ... che cosa? 20, evidentemente!
Anche ragionando "da destra a sinistra":
 z , rispetto al 30, dovrà avere lo stesso "peso" che ha il 4 rispetto al 6.
Ma 4 è $\frac{2}{3}$ di 6, cioè $\frac{2}{3}$ di 6, e allora z dovrà essere $\frac{2}{3}$ di 30, cioè 20.

PROPRIETA' FONDAMENTALE DELLE PROPORZIONI

In una proporzione, il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi;

E, VICEVERSA,

se 4 numeri non nulli sono tali che il prodotto di due di essi è uguale al prodotto degli altri due, allora con tali quattro numeri si può costruire una proporzione, a patto di prendere come medi (o come estremi) i fattori di un medesimo prodotto.

Brevemente: se a, b, c, d sono quattro numeri non nulli, vale la **doppia implicazione**

$$a : b = c : d \Leftrightarrow ad = bc$$

Dimostrazione $a : b = c : d \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd} \Leftrightarrow ad = bc$

Importante - **Questa proprietà consta di DUE enunciati**: un enunciato **diretto**, e il rispettivo **inverso**.

Essa fornisce perciò una condizione NECESSARIA E SUFFICIENTE affinché quattro numeri non nulli, presi in un dato ordine, formino una proporzione valida.

Per verificare se una proporzione è corretta, anziché calcolare i due quozienti per vedere se coincidono, **si può andare a vedere se il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi**: così facendo si applica, appunto, la "Proprietà Fondamentale" (precisamente, nel suo "aspetto **INVERSO**").

La Proprietà Fondamentale delle proporzioni ha importanti **conseguenze**.

Ad esempio, supponiamo che in una proporzione siano noti i primi tre termini ma non il quarto. Allora:

$$a : b = c : x; \quad ax = bc; \quad x = \frac{bc}{a}.$$

E in generale, è facile vedere che:

se il termine incognito è un estremo, sarà uguale al prodotto dei medi FRATTO l'estremo noto; se il termine incognito è un medio, sarà uguale al prodotto degli estremi FRATTO il medio noto

Esempio: $25 : x = 20 : 12 \quad x = \frac{25 \cdot 12}{20} = 15$

Se più termini di una proporzione sono espressi in funzione di una stessa incognita x , la proporzione si può interpretare come un'equazione che permetterà di trovare il valore di x .

Applicare la Propr. Fondamentale è in questo caso un modo veloce e comodo per liberarsi dai denominatori.

Esempio: ... In alternativa, si poteva trasformare in una "classica" equaz. coi denominatori:

$$\begin{aligned} (x+4) : 10 &= (2x+1) : 15 \\ (x+4) \cdot 15 &= 10 \cdot (2x+1) \\ 15x+60 &= 20x+10 \\ -5x &= -50; \quad x = 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x+4) : 10 &= (2x+1) : 15 \\ \frac{x+4}{10} &= \frac{2x+1}{15}; \quad \frac{3(x+4)}{30} = \frac{2(2x+1)}{30} \text{ ecc.} \end{aligned}$$

PROPRIETÀ DELLE PROPORZIONI (sul Vol. 1 trovi anche un paio di dimostrazioni, a titolo di esempio)

Le proporzioni godono di diverse altre **proprietà**, che permettono, a partire da una proporzione fissata $a : b = c : d$, di ricavarne altre, che saranno corrette anch'esse *se e solo se* lo è quella di partenza.

$b : a = d : c$ (invertire) $a : c = b : d$ (permutare i medi) $d : b = c : a$ (permutare gli estremi)

$(a \pm b) : a = (c \pm d) : c$ $(a \pm c) : (b \pm d) = a : b$ (comporre e scomporre applicato agli antecedenti e ai conseguenti)
 $(a \pm b) : b = (c \pm d) : d$ $(a \pm c) : (b \pm d) = c : d$

Alle proprietà sopra elencate si può aggiungere la seguente, relativa alle "catene di rapporti uguali":
"data una CATENA DI RAPPORTI UGUALI, la somma di tutti gli antecedenti sta alla somma di tutti i conseguenti come ciascun antecedente sta al proprio conseguente".

Es.: dalla catena $14 : 7 = 6 : 3 = 10 : 5$ si possono ricavare le 3 proporzioni $(14+6+10) : (7+3+5) = \begin{cases} 14 : 7 \\ 6 : 3 \\ 10 : 5 \end{cases}$

Applicazione: trovare 3 numeri sapendo che la loro somma è 90 e che sono proporzionali ai numeri 4, 11, 3 (o, come anche si dice, "stanno fra loro come 4:11:3")

$$x : 4 = y : 11 = z : 3 \quad (x+y+z) : (4+11+3) = x : 4 \quad 90 : 18 = x : 4 \quad x = \frac{90 \cdot 4}{18} = 20 \quad \dots \text{ e analogamente per } y, z$$

Il quarto termine di una proporzione è detto "QUARTO PROPORZIONALE dopo i primi tre termini".

Ad esempio, nella proporzione $8 : 6 = 12 : 9$ abbiamo che 9 è il quarto proporzionale dopo 8, 6, 12.

□ Trovare il quarto proporzionale dopo 24, 6, 8

$$\boxed{24 : 6 = 8 : x} \quad \text{da cui } x = \frac{6 \cdot 8}{24} = 2 \quad \text{(anche molto più semplicemente: 24 è il quadruplo di 6; e 8 a sua volta è il quadruplo ... di cosa? Di 2, è ovvio!)}$$

Una proporzione in cui i due medi sono uguali si dice "PROPORZIONE CONTINUA".

Ad esempio, $9 : 6 = 6 : 4$ è una proporzione continua.

In una proporzione continua, ciascuno dei due medi uguali si dice "MEDIO PROPORZIONALE fra il 1° e il 4° termine".

Ad esempio, in $9 : 6 = 6 : 4$, il 6 è medio proporzionale fra 9 e 4.

□ Trovare il medio proporzionale fra 2 e 32

$$\boxed{2 : x = x : 32} \quad x^2 = 2 \cdot 32; \quad x^2 = 64; \quad x = 8 \quad \text{(oppure } x = \pm 8, \text{ a seconda del contesto)}$$

ESERCIZI

- 1) Verifica che le seguenti proporzioni sono tutte corrette, controllando che in ciascuna il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi
 a) $12:16 = 15:20$ b) $12:6 = 6:3$ c) $40:12 = 100:30$ d) $1,2:2,16 = 1,5:2,7$
- 2) Determina il termine incognito nelle seguenti proporzioni, pensando direttamente all'uguaglianza dei due rapporti e quindi *senza applicare le formule* "prodotto dei medi fratto l'estremo noto", "prodotto degli estremi fratto il medio noto"
 a) $6:3 = x:5$ b) $6:3 = 5:x$ c) $15:3 = 35:x$ d) $15:3 = x:4$
 e) $1:2 = 2:x$ f) $x:10 = 4:8$ g) $3:4 = x:28$ h) $2:3 = x:10$
 i) $4:3 = x:12$ j) $x:4 = 6:30$ k) $40:50 = x:2$ l) $18:x = 30:40$
 m) $7:y = 6:3$ n) $24:8 = z:11,25$ o) $t:2,6 = 12:8$ p) $0,05:5 = x:0,2$
- 3) Determina il termine incognito nelle seguenti proporzioni, *applicando le formule* "prodotto dei medi fratto l'estremo noto", "prodotto degli estremi fratto il medio noto"
 a) $12:20 = 18:x$ b) $10:25 = x:10$ c) $x:3 = 4:5$ d) $15:x = 35:30$
 e) $12:5 = x:8$ f) $x:\frac{3}{4} = \frac{2}{3}:\frac{4}{5}$ g) $x:2,4 = 3,2:5$ h) $0,8:0,2 = 0,1:x$
- 4) Le seguenti proporzioni contengono più volte un'incognita. Determina il valore di questa.
 a) $18:(x+4) = 15:x$ b) $(x+2):14 = (x+3):16$ c) $x:(x+1) = (x+2):(x+7)$
 d) $h:(h-2) = (h-3):h$ e) $(w+1,2):4 = (w-1,2):3$ f) $a:(2a+3) = 5:10$
- 5) Determina il *quarto proporzionale* dopo:
 a) 4, 8 e 10 b) 5, 15 e 15 c) 40, 25 e 32 d) 3, 4 e 5
 e) 3; 3,3; 4 f) 2,5; 3,6; 4,7 g) $3^7, 3^{11}, 3^{10}$ h) $5 \cdot 10^{12}, 3 \cdot 10^{13}, 2 \cdot 10^8$
- 6) Determina il *medio proporzionale* (positivo) fra:
 a) 3 e 48 b) 24 e 6 c) 2 e 3 d) 2,5 e 6,4
 e) 3^7 e 3^{11} f) 3,3 e $3\bar{3}$ g) 1 e 5^6 h) 100 e 1000
- 7) **Dividere un numero in parti proporzionali a due numeri dati**
 Dividere il numero 30 in parti proporzionali ai numeri 5 e 7 significa trovare due numeri x, y tali che
 a. $x + y = 30$
 b. $x:5 = y:7$.
 Se, partendo dalla proporzione, si applica la proprietà del "comporre gli antecedenti e i conseguenti", si ottiene $\frac{(x+y):(5+7)}{30} = \frac{x:5}{y:7}$ da cui $x = 12,5; y = 17,5$
 In generale, comunque, per dividere un numero c in due parti proporzionali ai due numeri a e b , basta dividere c per la somma $a + b$ poi moltiplicare il risultato ottenuto prima per a poi per b .
 Dividi il numero dato in parti proporzionali ai numeri a fianco specificati:
 a) 30; 1 e 4 b) 30; 2 e 3 c) 100; 2 e 3 d) 1; 9 e 11
 e) 0,07; 5 e 9 f) 30; 5 e 2 g) 72; 2, 3 e 4 h) 72; 2 e 3
- 8) ♥ Pierino, alla richiesta di determinare x nella proporzione $(x+3):x = 2x:25$, scrive: $x = \frac{25(x+3)}{2x}$, ma non è molto convinto di questo procedimento. Cosa gli consiglieresti?

RISULTATI

- 2a) 10 2b) 2,5 2c) 7 2d) 20 2e) 4 2f) 5 2g) 21 2h) 20/3
 2i) 16 2j) 4/5 2k) 8/5 2l) 24 2m) 3,5 2n) 33,75 2o) 3,9 2p) 0,002
 3a) 30 3b) 4 3c) 12/5 3d) 90/7 3e) $96/5 = 19,2$ 3f) 5/8 3g) 1,536 3h) 0,025
 4a) 20 4b) 5 4c) 1/2 4d) 6/5 4e) 8,4 4f) impossibile
 5a) 20 5b) 45 5c) 20 5d) 20/3 5e) 4,4 5f) 6,768 5g) 3^{14} 5h) $1,2 \cdot 10^9$
 6a) 12 6b) 12 6c) $\sqrt{6} \approx 2,45$ 6d) 4 6e) 3^9 6f) $\sqrt{11} \approx 3,317$ 6g) 5^3 6h) $\sqrt{100000} \approx 316$
 7a) 6 e 24 7b) 12 e 18 7c) 40 e 60 7d) 0,45 e 0,55 7e) 0,025 e 0,045 7f) $150/7 \approx 21,4$ e $60/7 \approx 8,6$
 7g) 16, 24 e 32 7h) 28,8 e 43,2 8) Di fare *prodotto dei medi = prodotto degli estremi* poi risolvere l'equazione