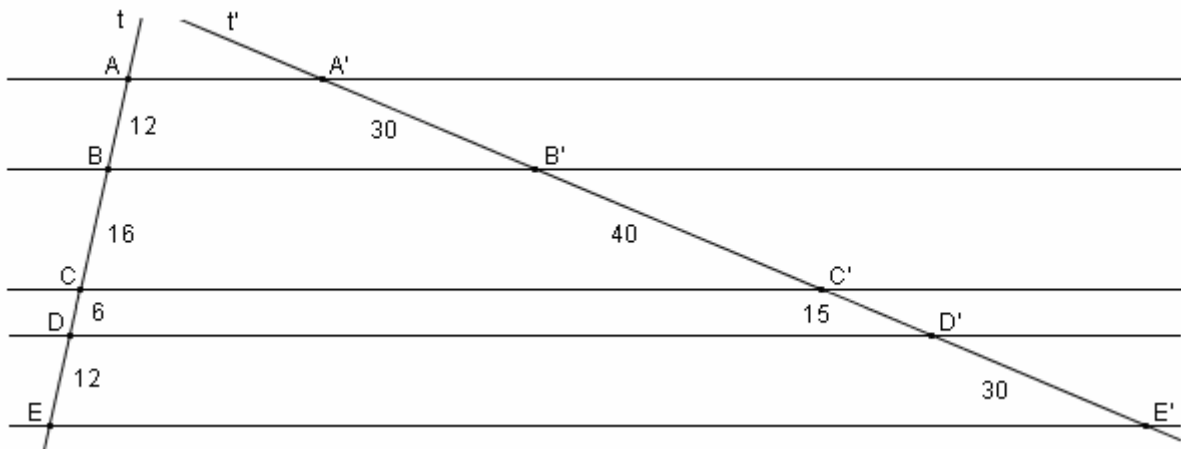


9.2 - SIMILITUDINI

□ IL TEOREMA DI TALETE (= “Grande” Teorema di Talete)

Quando un fascio di rette parallele viene tagliato da due trasversali, i segmenti staccati dalle parallele sulle trasversali sono proporzionali



Vale a dire, con riferimento alla figura:

$$(1) \quad AB : CD = A'B' : C'D'$$

o anche, applicando la proprietà del permutare:

$$(2) \quad AB : A'B' = CD : C'D'$$

Il “Teorema di Talete” è dunque una **generalizzazione** dell’enunciato che avevamo chiamato “**Piccolo Teorema di Talete**” e che affermava: “*Se un fascio di parallele è tagliato da due trasversali, a segmenti uguali su una trasversale corrispondono segmenti uguali sull’altra*”.

I DUE MODI ALTERNATIVI DI “VEDERE” LA PROPORZIONALITÀ

Dicendo “i segmenti staccati dalle parallele sulle trasversali sono proporzionali”, voglio intendere che:

♪ un segmento (sulla 1^a trasversale) sta ad un altro segmento (sempre sulla 1^a trasversale) come il corrispondente del primo sta al corrispondente del secondo (vedi proporzione 1)

oppure, in modo PERFETTAMENTE EQUIVALENTE:

♪ un segmento (sulla 1^a trasversale) sta al suo corrispondente (sulla 2^a trasversale) come un altro segmento (sulla 1^a trasversale) sta al suo corrispondente (sulla 2^a trasversale) (vedi proporzione 2)

Dimostrazione del Teorema di Talete

Quando un fascio di parallele è tagliato da due trasversali t e t' , si stabilisce una corrispondenza biunivoca fra l’insieme S dei segmenti giacenti su t (S è una classe di grandezze, “sottoclasse” della più generale classe di tutti i segmenti del piano) e l’insieme S' dei segmenti che giacciono su t' .

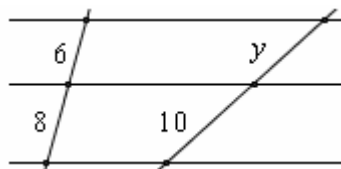
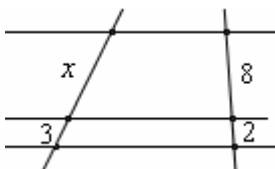
E’ noto da un teorema precedente che

“a segmenti uguali su una trasversale, corrispondono segmenti uguali sull’altra”; ed è evidente che

“a un segmento, su una trasversale, che sia somma di due certi segmenti, corrisponde quel segmento, sull’altra trasversale, che è la somma dei rispettivi corrispondenti” (ad es. nella figura, al segmento AC , che è la somma $AB+BC$, corrisponde il segmento $A'C'$, che è proprio la somma di $A'B'$ (corrispondente di AB) con $B'C'$ (corrispondente di BC).

Allora sono verificate le condizioni del “Criterio di Proporzionalità” (cap. 7, pag. 195), per cui la tesi è dimostrata.

Due esercizietti sul Teorema di Talete: determina x e y .



Soluzioni

$$x : 3 = 8 : 2 \text{ oppure } x : 8 = 3 : 2$$

$$\text{da cui } x = 12$$

$$6 : 8 = y : 10 \text{ oppure } 6 : y = 8 : 10$$

$$\text{da cui } y = 15/2 = 7,5$$

□ POLIGONI SIMILI

Due poligoni con lo stesso numero di lati si dicono “simili” se sono uno l’ingrandimento dell’altro.

Specifichiamo meglio, cercando di dare una veste matematica precisa a questa idea.

Se ti sforzi di disegnare due poligoni, ad esempio due quadrilateri, in modo che **uno di essi appaia come l’ingrandimento dell’altro**, ti renderai conto che dovrai innanzitutto disegnarli con **gli angoli rispettivamente uguali**;

... ma ciò **non sarà sufficiente**;

ci vorrà qualcosa in più, e precisamente dovrai fare in modo che **i lati siano in proporzione**.

I due poligoni della figura sottostante hanno gli angoli rispettivamente uguali. Eppure, evidentemente, NON sono “uno l’ingrandimento dell’altro”...

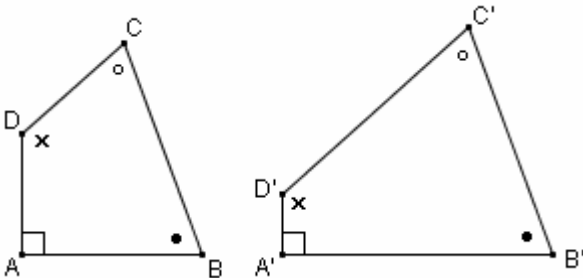


Figura 1

... Invece i due poligoni di quest’altra figura, oltre ad avere gli angoli rispettivamente uguali, hanno pure i lati proporzionali, perché ciascun lato del primo poligono è $\frac{2}{3}$ del lato che gli corrisponde nel secondo poligono. In questa Figura 2, i due poligoni in gioco appaiono “uno l’ingrandimento dell’altro”.

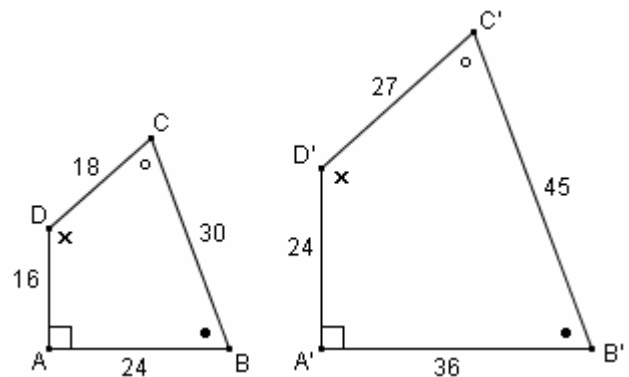


Figura 2

Da queste considerazioni discende la seguente

DEFINIZIONE

Due poligoni aventi lo stesso numero di lati si dicono SIMILI se hanno:

- I) **gli angoli rispettivamente uguali**
- II) **e i lati corrispondenti proporzionali**

Dire che “hanno i lati corrispondenti proporzionali” significa dire che il rapporto fra due lati corrispondenti è lo stesso per ogni coppia di lati corrispondenti.

Con riferimento alla *Figura 2*,

$$AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' = DA : D'A'.$$

Tale rapporto costante si dice “**rapporto di similitudine**”.

Ad es., in *Figura 2*, il rapporto di similitudine dei due quadrilateri ABCD, A'B'C'D' (presi in quest’ordine), è $\frac{3}{2}$ (prendendoli invece nell’ordine opposto, il rapporto di similitudine sarebbe $\frac{2}{3}$)

$$\text{rapporto di similitudine} = \frac{\text{lato poligono pensato per secondo}}{\text{lato poligono pensato per primo}}$$

per cui se il rapporto di similitudine è < 1 , il secondo è rimpicciolito rispetto al primo; > 1 , il secondo è ingrandito rispetto al primo.

□ TRIANGOLI SIMILI

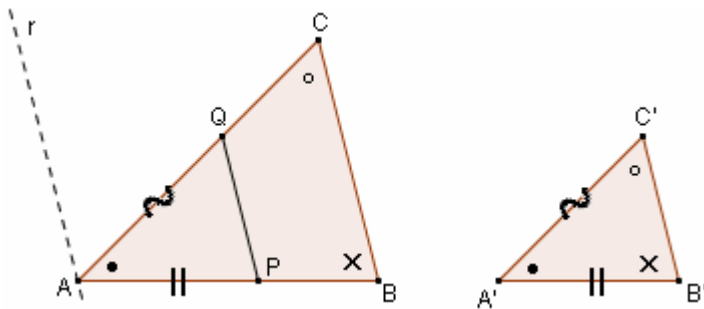
Abbiamo visto che due poligoni si dicono simili se hanno gli angoli rispettivamente uguali e i lati corrispondenti proporzionali.

Nel caso dei triangoli, tuttavia, **questa definizione si rivela sovrabbondante**, perché si può dimostrare che se due triangoli hanno gli angoli rispettivamente uguali, allora hanno SENZ’ALTRO anche i lati corrispondenti proporzionali; cosa che invece non necessariamente accade per i poligoni con più di tre lati.

Questo enunciato prende il nome di “Primo Criterio di Similitudine”.

TEOREMA (1° Criterio di Similitudine):

Se due triangoli hanno gli angoli rispettivamente uguali, allora sono simili, cioè hanno anche i lati corrispondenti proporzionali



IPOTESI

$$\widehat{A} = \widehat{A}'; \quad \widehat{B} = \widehat{B}'; \quad \widehat{C} = \widehat{C}'$$

TESI

ABC è simile con A'B'C',
cioè vale anche la proporzione
 $AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'$

Dimostrazione (per la prima proporzione; per le altre si procede in modo analogo)

Prendiamo sulla semiretta AB un segmento $AP = A'B'$, e sulla semiretta AC un segmento $AQ = A'C'$. Il triangolo APQ risulterà uguale al triangolo A'B'C' per il Primo Criterio di Uguaglianza dei Triangoli (è infatti $\widehat{A} = \widehat{A}'$ per ipotesi). Pertanto $\widehat{APQ} = \widehat{B}' = \widehat{B}$ e quindi le due rette PQ e BC, formando con la trasversale AB due angoli corrispondenti uguali, sono parallele. Tracciamo ora per A un'altra retta r parallela a PQ e BC. Per il Teorema di Talete avremo $AB : AP = AC : AQ$ e quindi anche, essendo $AP = A'B'$ e $AQ = A'C'$, $AB : A'B' = AC : A'C'$

Il 1° Criterio di Similitudine è un teorema che si applica con **grandissima frequenza** negli esercizi. Osserviamo fra l'altro che si può subito concludere che due triangoli dati sono simili anche se si sa (per ipotesi o per precedente dimostrazione) che hanno **DUE angoli rispettivamente uguali**, perché allora (per differenza rispetto a 180°) saranno certo uguali anche gli angoli rimanenti.

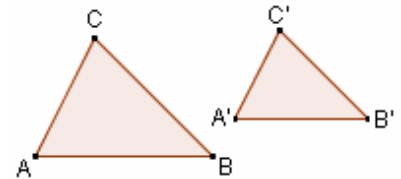
♥ **PUNTUALIZZAZIONE: DUE MODI ALTERNATIVI DI “VEDERE” LA PROPORZIONALITÀ**

Quando so che due certi triangoli ABC e A'B'C' sono simili, allora posso impostare le proporzioni

$$AB : A'B' = AC : A'C'; \quad AB : A'B' = BC : B'C'; \quad AC : A'C' = BC : B'C'$$

Permutando i medi in ciascuna delle tre, esse diventano:

$$AB : AC = A'B' : A'C'; \quad AB : BC = A'B' : B'C'; \quad AC : BC = A'C' : B'C'$$



Quindi se abbiamo due triangoli simili, l'affermazione che “i lati corrispondenti sono proporzionali” può essere interpretata indifferentemente in due modi, perfettamente equivalenti fra loro.

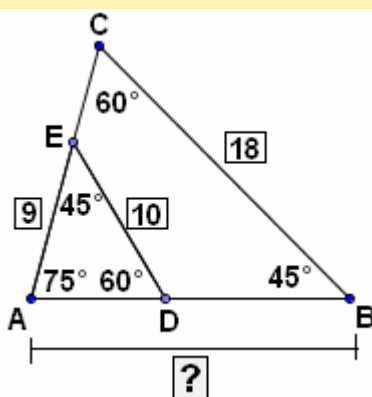
♪ Si può interpretare nel senso che il rapporto tra due lati corrispondenti è costante, cioè che

“un lato (del 1° triangolo) sta al suo corrispondente, come un altro lato (del 1° triangolo) sta al suo corrispondente”...

♪ ... ma si può anche interpretare nel senso che il rapporto di due lati del 1° triangolo è uguale al rapporto dei due lati corrispondenti del 2° triangolo (presi nello stesso ordine), cioè che

“un lato (del 1° triangolo) sta ad un altro lato (sempre del 1° triangolo) come il corrispondente del primo sta al corrispondente del secondo”.

♥ **ESEMPIO DI ESERCIZIO**



Nella figura, i due triangoli ABC, ADE sono simili per il 1° Criterio.

Dunque, per determinare AB, imposteremo *una qualunque* fra le proporzioni che coinvolgono AB insieme con segmenti noti, ad esempio

□ $AB : AE = BC : DE$ (“un lato, del 1° triangolo, sta al suo corrispondente, come un altro lato, del 1° triangolo, sta al suo corrispondente”;
AB e AE si corrispondono perché entrambi opposti a un angolo di 60°)

□ OPPURE $AB : BC = AE : DE$
(un lato, del 1° triangolo, sta a un altro lato, sempre del 1° triangolo, come il corrispondente del primo sta al corrispondente del secondo)

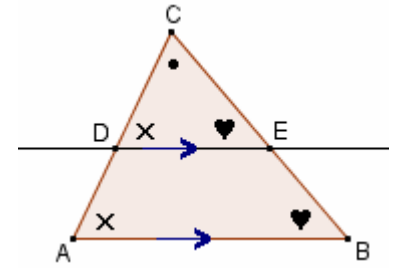
♥ **In due triangoli simili, sono corrispondenti (“omologhi”) due lati che stiano opposti ad angoli uguali, o allo stesso angolo**

Bene; prendiamo una qualsiasi delle proporzioni, ad es. $AB : AE = BC : DE$ e sostituiamo al posto degli elementi noti, AE, BC e DE, la loro misura (AB fa da “x”, ma è inutile una nuova lettera in questo caso: lasceremo AB).

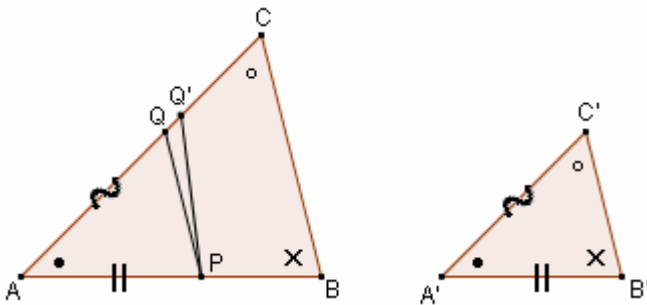
$$\text{Avremo così } AB : 9 = 18 : 10 \quad \text{da cui } AB = \frac{9 \cdot 18}{10} = \frac{162}{10} = 16,2$$

**COROLLARIO del 1° Criterio di Similitudine:
Una retta parallela ad un lato di un triangolo
stacca da questo un triangolo simile al dato**

Con riferimento alla figura qui a fianco:
basta tener presente che,
quando si hanno due parallele con trasversale,
gli angoli corrispondenti sono uguali ...



**TEOREMA (2° Criterio di Similitudine):
Se due triangoli hanno due lati proporzionali e gli angoli compresi uguali, allora sono simili**



IPOSTESI
 $AB : A'B' = AC : A'C'$

$$\hat{A} = \hat{A}'$$

TESI
ABC simile con A'B'C'

Dimostrazione

Prendiamo sulla semiretta AB il segmento $AP = A'B'$, e sulla semiretta AC il segmento $AQ = A'C'$. Ora il triangolo APQ risulterà uguale ad A'B'C' per il 1° Crit. di Uguaglianza dei Triangoli ($\hat{A} = \hat{A}'$ per ipotesi). Basterà dunque dimostrare che ABC è simile ad APQ; e a tale scopo, tenendo presente il Corollario del Primo Criterio di Similitudine, basterà far vedere che PQ è parallela a BC.

Per assurdo. Se PQ *NON* fosse parallela a BC, la parallela a BC condotta da P taglierebbe AC in un punto Q' distinto da Q; i due triangoli ABC, APQ' risulterebbero simili e si avrebbe

(1) $AB : AP = AC : AQ'$

D'altra parte, per ipotesi e per la costruzione effettuata, vale pure la proporzione

(2) $AB : AP = AC : AQ$. Ma

**se due proporzioni hanno ordinatamente uguali tre termini,
allora hanno necessariamente uguale anche il termine rimanente**
(“UNICITA’ DELLA QUARTA PROPORZIONALE”: vedi NOTA)

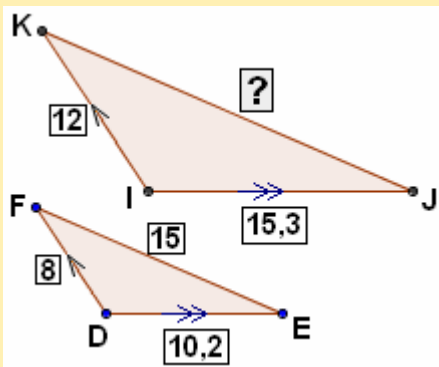
Quindi, dal fatto che valgano contemporaneamente le due proporzioni (1) e (2), si trae $AQ' = AQ$, e quindi $Q' \equiv Q$, contro quanto supposto.

NOTA

Se è $a : b = c : d$ e contemporaneamente $a : b = c : e$ allora si ha $d = \frac{bc}{a}$ ma anche $e = \frac{bc}{a}$ quindi sarà $d = e$ (**UNICITA’ DELLA QUARTA PROPORZIONALE, O DEL QUARTO PROPORZIONALE**)



**E
S
E
M
P
I
O**



In figura, i due angoli \hat{EDF} , \hat{JKI} hanno i lati paralleli e concordi, quindi sono fra loro uguali.

Inoltre $12 : 8 = 15,3 : 10,2$ (i due rapporti valgono entrambi $3/2$). Di conseguenza si può affermare che i due triangoli EDF, JIK sono simili per il 2° Criterio di Similitudine.

Potremo perciò, per determinare JK, scrivere una qualunque proporzione che coinvolga JK e segmenti noti, ad esempio

$$JK : EF = IK : DF \text{ da cui } JK = \frac{EF \cdot IK}{DF} = \frac{15 \cdot 12}{10,2} = \frac{45}{2} = 22,5$$

(è possibile, se si preferisce, anche scrivere

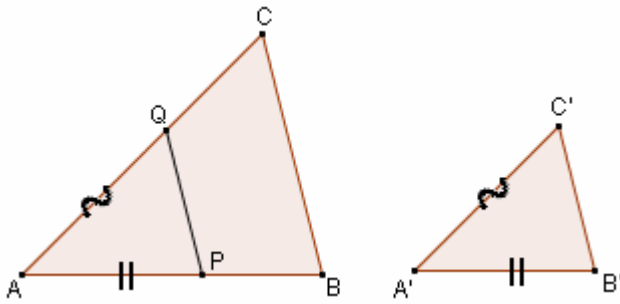
$$JK : EF = IK : DF \rightarrow JK : 15 = 12 : 8 \rightarrow JK = 15 \cdot 12 / 8 = 22,5).$$

Più rapidamente, osservato che i lati del triangolo grande sono una volta e mezza quelli del triangolo piccolo,

$$JK = \frac{3}{2} EF = \frac{3}{2} \cdot 15 = \frac{45}{2} = 22,5$$

TEOREMA (3° Criterio di Similitudine):

Se due triangoli hanno i tre lati ordinatamente proporzionali, allora sono simili



$$\text{HP} \quad AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'$$

TH ABC simile con $A'B'C'$

OSSERVAZIONE

Quindi, considerate le due condizioni che nei *poligoni* definiscono la similitudine:

- 1) uguaglianza degli angoli corrispondenti
 - 2) proporzionalità dei lati
- il Terzo Criterio ci dice che, NEI TRIANGOLI, è sufficiente la SECONDA,
 □ mentre il Primo Criterio ci diceva che, sempre NEI TRIANGOLI, è sufficiente la PRIMA.

Dimostrazione

Prendiamo sulla semiretta AB il segmento $AP = A'B'$, e sulla semiretta AC il segmento $AQ = A'C'$.
Essendo

$$AB : A'B' = AC : A'C'$$

si avrà anche

$$AB : AP = AC : AQ$$

I due triangoli ABC , APQ sono perciò simili per il 2° Criterio di Similitudine; quindi sarà pure

$$(1) \quad AB : AP = BC : PQ$$

D'altra parte, essendo, per ipotesi, $AB : A'B' = BC : B'C'$ e, per costruzione, $AP = A'B'$, si ha altresì

$$(2) \quad AB : AP = BC : B'C'$$

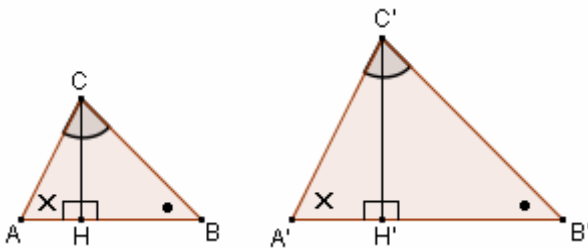
Confrontando le due proporzioni (1) e (2), per l'unicità della quarta proporzionale si trae

$$PQ = B'C'.$$

Allora i due triangoli APQ , $A'B'C'$ sono uguali per il 3° Criterio di uguaglianza dei triangoli, ed essendo ABC simile ad APQ , sarà pure ABC simile ad $A'B'C'$, come volevasi dimostrare.

TEOREMA

In due triangoli simili, le basi stanno fra loro come le rispettive altezze

**Dimostrazione**

Dalla similitudine di ABC e $A'B'C'$

segue

$$AB : A'B' = AC : A'C'$$

Inoltre, poiché per ipotesi si ha $\hat{A} = \hat{A}'$,

anche i due triangoli rettangoli ACH e $A'C'H'$

sono simili, da cui

$$AC : A'C' = CH : C'H'.$$

Confrontando le due proporzioni, segue subito la tesi.

IPOTESI

ABC simile con $A'B'C'$
 $CH \perp AB$, $C'H' \perp A'B'$

TESI

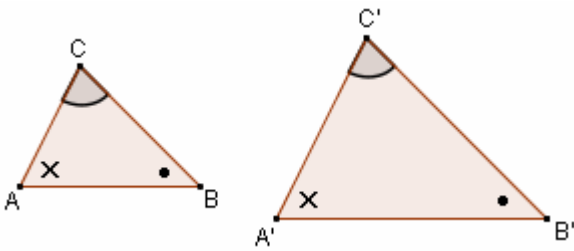
$$AB : A'B' = CH : C'H'$$

OSSERVAZIONE

Perciò, se due triangoli sono simili, qualora, ad esempio, ogni lato del primo sia $\frac{2}{3}$ del lato che gli corrisponde nel secondo (con rapporto di similitudine $\frac{3}{2}$, quindi), anche ogni altezza del primo sarà $\frac{2}{3}$ dell'altezza che gli corrisponde nel secondo.

Insomma, il rapporto fra due qualsiasi lati corrispondenti finisce per essere anche il rapporto fra due qualsiasi *altezze* corrispondenti.

TEOREMA. In due triangoli simili, i perimetri stanno fra loro come due lati omologhi



IPOTESI

ABC simile con A'B'C'

TESI

$$2p(ABC) : 2p(A'B'C') = AB : A'B' \\ (= AC : A'C' = BC : B'C')$$

Dimostrazione

Semplicissima. Poiché, per ipotesi, ABC e A'B'C' sono simili, si avrà $AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'$.

Applicando a questa catena di rapporti uguali

la proprietà del comporre gli antecedenti e i conseguenti (NOTA),

si otterrà $(AB + AC + BC) : (A'B' + A'C' + B'C') = AB : A'B' (= AC : A'C' = BC : B'C')$, cioè la tesi.

NOTA. Questa proprietà afferma:

**“data una catena di rapporti uguali,
la somma di tutti gli antecedenti sta alla somma di tutti i conseguenti
come ciascun antecedente sta al proprio conseguente”**

Ad esempio, da $14 : 7 = 6 : 3 = 10 : 5$ ricaviamo $(14 + 6 + 10) : (7 + 3 + 5) = \begin{cases} 14 : 7 \\ 6 : 3 \\ 10 : 5 \end{cases}$

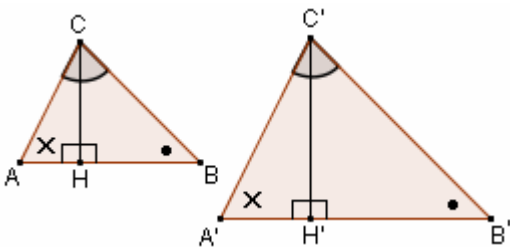
Applicazione: trovare 3 numeri sapendo che la loro somma è 90

e che sono proporzionali ai numeri 4, 11, 3 (o, come anche si dice, “stanno fra loro come 4:11:3”)

$$x : 4 = y : 11 = z : 3 \quad (x + y + z) : (4 + 11 + 3) = x : 4 \quad 90 : 18 = x : 4 \quad x = \frac{90 \cdot 4}{18} = 20 \quad \dots \text{e analogamente per } y, z$$

TEOREMA

In due triangoli simili, le aree stanno fra loro come i quadrati di due lati omologhi (NOTA)



Dimostrazione

Poiché, come già dimostrato, in due triangoli simili le basi stanno fra loro come le rispettive altezze, si avrà

$$AB : A'B' = CH : C'H' \quad \left(\frac{AB}{A'B'} = \frac{CH}{C'H'} \right)$$

da cui

$$\frac{S(ABC)}{S(A'B'C')} = \frac{\frac{AB \cdot CH}{2}}{\frac{A'B' \cdot C'H'}{2}} = \frac{AB \cdot CH}{A'B' \cdot C'H'} = \\ = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{CH}{C'H'} = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{AB}{A'B'} = \frac{AB^2}{A'B'^2}$$

IPOTESI

ABC simile con A'B'C'

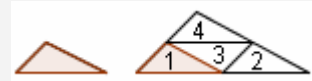
TESI

$$\frac{S(ABC)}{S(A'B'C')} = \frac{AB^2}{A'B'^2}$$

NOTA

Quindi, se nel passaggio da un triangolo ad un altro simile il lato, ad esempio, **raddoppia**, allora l'area diventa il **quadruplo!**

Osserva d'altronde la figura ...

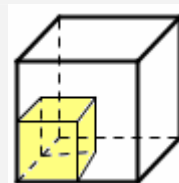


Se poi il lato triplica, l'area diventa 9 volte, ecc. Questo vale, più in generale, per tutti i poligoni, anzi per tutte le figure piane sottoposte a dilatazione o contrazione.

Nello **spazio tridimensionale**, avviene qualcosa del genere ... però ...

**In due figure solide simili,
i volumi stanno fra loro
come i CUBI di due lati omologhi.**

Se un solido subisce, ad es., una dilatazione in modo che ogni misura lineare raddoppi, il suo volume diventerà 8 volte tanto.



Il cubo di lato doppio richiede 8 cubetti piccoli per essere riempito. Quindi il suo volume è 8 volte il volume del cubetto piccolo.

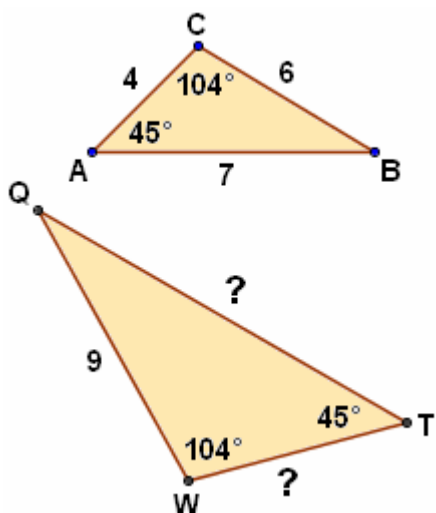
OSSERVAZIONE RIASSUNTIVA

Nel passaggio da un triangolo a un altro simile, *ogni lato viene moltiplicato per k*. Allora risulteranno moltiplicati anche

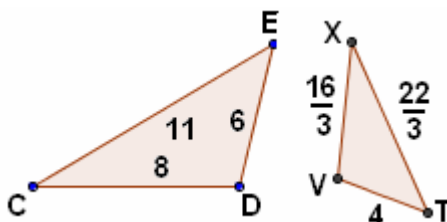
- il PERIMETRO per k ,
- ciascuna ALTEZZA per k ,
- l'AREA invece per il numero k^2 .



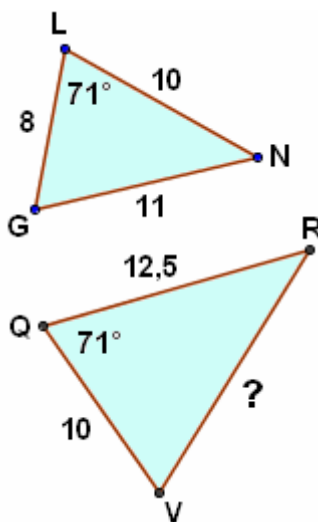
ESERCIZI sui triangoli simili



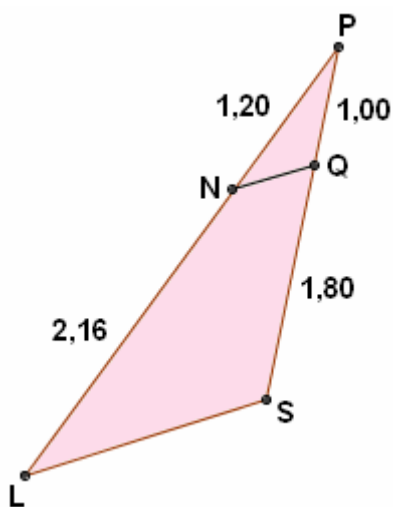
- 1) Quale teorema ci garantisce che i due triangoli ABC, WTQ sono simili?
 Quanto misurano i lati indicati col punto interrogativo?
 Quanto vale il rapporto di similitudine?



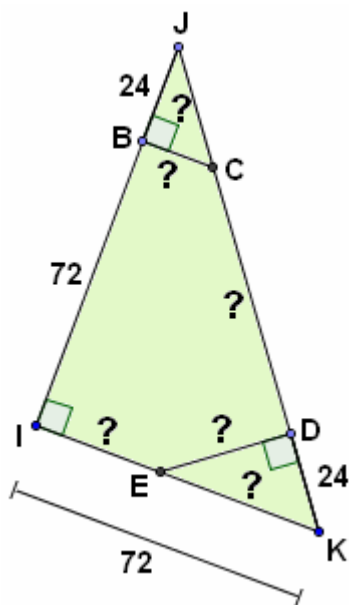
- 2) Quale teorema ci garantisce che i due triangoli CDE, VTX sono simili?
 Quanto vale il rapporto di similitudine?



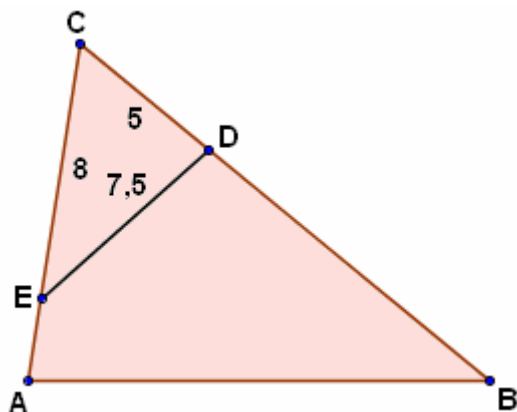
- 3) Quale teorema ci garantisce che i due triangoli GNL, QVR sono simili?
 Quanto vale il rapporto di similitudine?
 Quanto misura il lato indicato col punto interrogativo?



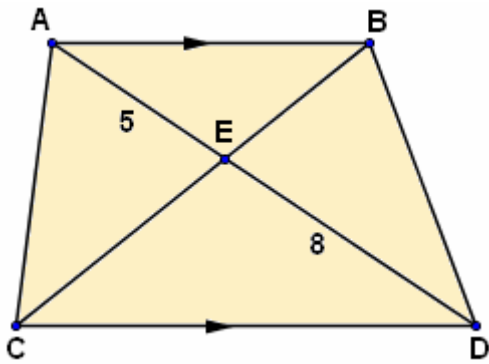
- 4) Siamo certi che NQ sia parallela a LS?



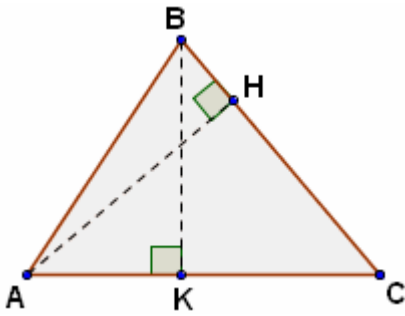
- 5) Quanto misura, innanzitutto, l'ipotenusa del triangolo rettangolo IJK?
 Quale teorema ci garantisce che i triangoli IJK, BJC sono simili?
 Quanto vale il loro rapporto di similitudine?
 Quale teorema ci garantisce che i triangoli IJK, DEK sono simili?
 Quanto vale il loro rapporto di similitudine?
 Quanto misurano i segmenti indicati col punto interrogativo?



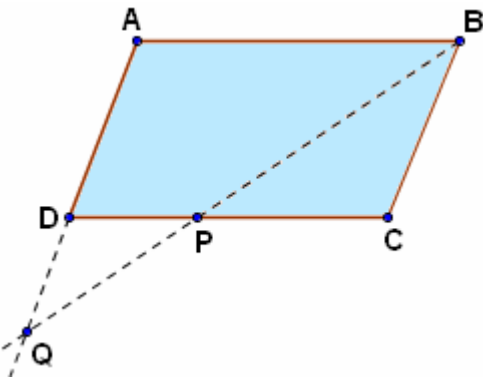
- 6) Sapendo che $CA = 10$ e $CB = 16$, è possibile dedurre che EDC è simile ad ABC, e determinare la misura di AB: perché?



- 7) AD, BC sono le diagonali di un trapezio e si tagliano in E.
 I due triangoli AEB, CED sono simili?
 E i due triangoli AEC e BED?
 Qual è il rapporto fra i perimetri dei triangoli AEB, CED?
 Qual è il rapporto tra le loro aree?
 Se CB misurasse 12 cm, quanto misurerebbero CE ed EB?



- 8) In un triangolo ABC,
 siano AH e BK
 due altezze.
 Dimostra che
 $AC \cdot CK = BC \cdot CH$



- 9) Dal vertice B di un parallelogrammo ABCD
 si traccia una semiretta BP,
 essendo P un punto sul lato DC;
 questa semiretta va a intersecare
 la retta AD in Q.
 I due triangoli BPC e ABQ sono simili:
 perché?
 Se $AB = 10$, $AD = 6$ e $DP = 4,2$
 quanto misurerà DQ?

**Problemi
 vari
 sulle
 similitudini
 sono proposti
 a partire
 da pagina
 258**

RISPOSTE

- Il 1° Criterio di Similitudine; $WT : AC = WQ : BC \rightarrow WT : 4 = 9 : 6$ oppure $WT : WQ = AC : BC \rightarrow \dots$
 $WT = 6$ e $QT = 10,5$; rapporto di similitudine $3/2$ ($2/3$ se i triangoli venissero pensati in ordine inverso)
- Il 3° Criterio; $2/3$ 3) Il 2° Criterio; $5/4 = 1,25$; $13,75$
- Sì, il parallelismo è certo. Uno dei modi di giustificare l'affermazione è il seguente:
 i due triangoli PNQ, PLS sono simili per il 2° Criterio (con rapporto di similitudine 2,8);
 ma allora, ad esempio, si ha $\widehat{PNQ} = \widehat{PLS}$; ed essendo questi due angoli in posizione di corrispondenti
 rispetto alle due rette NQ ed LS tagliate dalla trasversale LP, tali due rette sono fra loro parallele.
- 120; il 1° Crit.; $1/4$; il 1° Crit.; $1/3$; $BC = 18$; $JC = 30$; $DE = 32$; $EK = 40$; $IE = 32$; $CD = 66$
- Poiché $5:10 = 8:16$, i due lati che formano l'angolo \widehat{C} sono proporzionali
 e si può invocare il 2° Criterio di Similitudine. AB misurerà 15.
- AEB e CED sono simili per il 1° Criterio (due angoli alterni interni di rette parallele con trasversale
 sono uguali); invece AEC e BED, in generale, *non* sono simili.
 Il rapporto fra i perimetri dei triangoli AEB e CED è $5/8$ e il rapporto tra le loro aree è $25/64$.
 CE misurerebbe cm $12 \cdot 8/13 = 96/13$ ed EB misurerebbe cm $12 \cdot 5/13 = 60/13$.
- I due triangoli ACH e BCK sono simili per il 1° Criterio, e dalla proporzione $AC : BC = CH : CK$
 segue la tesi (in una proporzione, il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi).
- 1° Criterio: $\widehat{CBP} = \widehat{AQB}$ perché alterni interni rispetto a due parallele con trasversale,
 $\widehat{CPB} = \widehat{ABQ}$ per la stessa ragione; oppure, $\widehat{C} = \widehat{A}$ perché angoli opposti in un parallelogrammo.
 Anche: per ovvie ragioni BPC è simile con QPD che a sua volta è simile con ABQ, quindi ...
 DQ misurerà 4,345 circa (similitudine fra QPD e BPC)