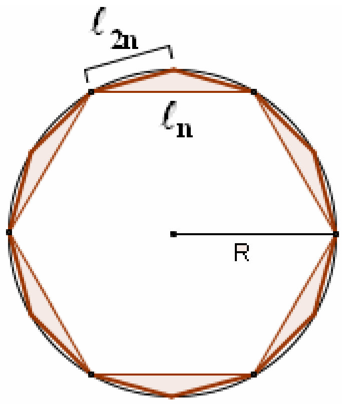
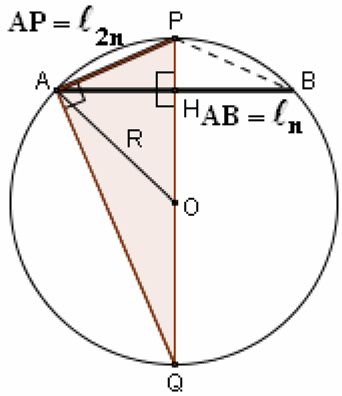
LA FORMULA $\ell_n \to \ell_{2n}$



Risolviamo infine il seguente problema (**formula** $\ell_n \to \ell_{2n}$):
nota la misura ℓ_n
del lato di un poligono regolare di n lati,
inscritto in un cerchio di raggio R,
determinare la misura ℓ_{2n}
del lato del poligono regolare inscritto,
avente un numero di lati doppio.



Sia $AB = \ell_n$ (vedi figura qui a fianco).
Il diametro PQ perpendicolare ad AB
divide in metà tanto la corda quanto l'arco di estremi A e B;
si avrà pertanto $AP = \ell_{2n}$.
Applicando Pitagora al triangolo rettangolo AHO, si trae

$$OH = \sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{2}\ell_n\right)^2} = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}\ell_n^2} = \sqrt{\frac{4R^2 - \ell_n^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - \ell_n^2}$$

da cui

$$PH = R - \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - \ell_n^2}$$

Applichiamo ora il Primo Teorema di Euclide
al triangolo PAQ, che è rettangolo in A
perché inscritto in una semicirconferenza:

$$\ell_{2n}^2 = AP^2 = PQ \cdot PH = 2R\left(R - \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - \ell_n^2}\right) = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \ell_n^2}$$

da cui la formula cercata:

$$\boxed{\ell_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \ell_n^2}} \qquad \textbf{FORMULA } \ell_n \to \ell_{2n}}$$

ESERCIZIO AL COMPUTER
Con un *foglio elettronico*
calcola, a partire da $\ell_6 = 1$
(supponendo $R = 1$:
come sappiamo, il lato
dell'esagono regolare inscritto
è uguale al raggio),
i valori di $\ell_{12}, \ell_{24}, \ell_{48}, \ldots$

APPLICAZIONI DELLA FORMULA

♪ Per esempio, siccome sappiamo che $\ell_4 = R\sqrt{2}$, avremo:

$$\ell_8 = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \ell_4^2}} =$$

$$= \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - (R\sqrt{2})^2}} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - 2R^2}} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{2R^2}} = \sqrt{2R^2 - R^2\sqrt{2}} = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$\boxed{\ell_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$ (**lato dell'OTTAGONO REGOLARE inscritto in un cerchio di raggio R**)

♫ Per determinare poi ℓ_5, potremo partire dalla formula $\ell_{10} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \ell_5^2}}$,

risolvendola rispetto a ℓ_5 e poi sostituendo al posto di ℓ_{10} il valore noto $\ell_{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}R$.

Prova a fare i calcoli: otterrai alla fine

$\boxed{\ell_5 = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2}R}$ (**lato del PENTAGONO REGOLARE inscritto in un cerchio di raggio R**)