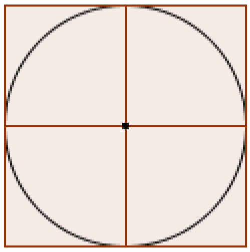
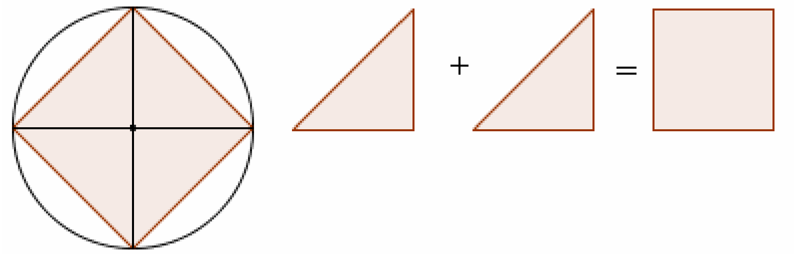
10.8 - AREA DEL CERCHIO, LUNGHEZZA DELLA CIRCONFERENZA IL NUMERO “PI GRECO” π

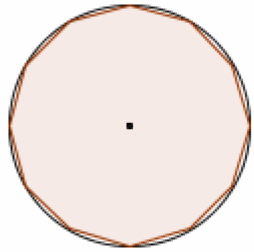
Un cerchio è *minore del quadruplo* del quadrato che ha per lato il raggio …



… ma è *maggiore del doppio* di questo quadrato.



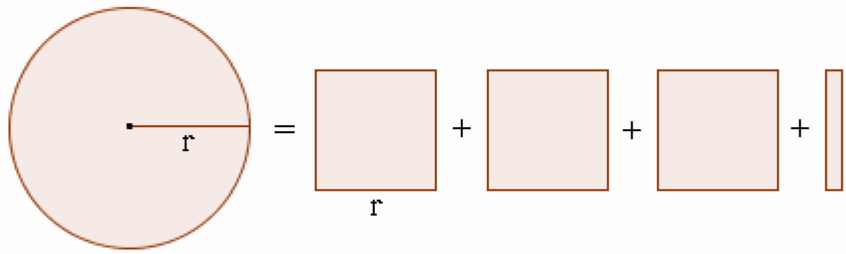
Qual è il numero *esatto* che ci dice
“quante volte il quadrato che ha per lato il raggio è contenuto nell’intero cerchio”?
Insomma, qual è il numero *esatto* che esprime
“il rapporto fra il cerchio e il quadrato che ha per lato il raggio”?



Possiamo avvicinarci al valore di questo numero se consideriamo un cerchio di raggio 1 (per il quale, quindi, l’area del quadrato costruito sul raggio sarà $1^2=1$) e calcoliamo, ad esempio, l’area di un poligono regolare inscritto con molti lati. Tale area approssimerà bene (per difetto) l’area del cerchio, e ci darà quindi una buona approssimazione (per difetto) del numero cercato.

Fra l’altro, in calcoli di questo tipo ci può tornare molto utile la formula $\ell_n \to \ell_{2n}$ (par. 10.2): a partire ad esempio dall’esagono regolare inscritto, che ha 6 lati (n=6) ognuno dei quali, come è noto, ha lunghezza uguale a quella del raggio, quindi nel nostro caso 1 ($\ell_n=\ell_6=1$) possiamo ricavare il lato – perciò, poi, anche l’apotema e l’area – del dodecagono regolare inscritto (n=12), poi da questo il lato del poligono regolare inscritto di 24 lati (n=24), ecc. ecc.
Ad esempio, preso un poligono regolare di 24 lati, inscritto in un cerchio di raggio 1, si vede col calcolo che la sua area è uguale a 3,1058285…;
se passiamo al poligono regolare inscritto di 48 lati otteniamo che la sua area vale 3,1326286…
Studi più approfonditi (appassionanti, ma non facili!) portano a stabilire che, in definitiva, il numero che esprime il rapporto fra un cerchio e il quadrato che ha per lato il raggio è un numero *irrazionale* un po’ maggiore di 3,14 .
Questo numero è stato chiamato dai matematici π (“pi greco”).
Dunque

$$\boxed{\textbf{Area cerchio} = \pi \cdot \textbf{raggio}^2 \quad (S=\pi r^2)}$$

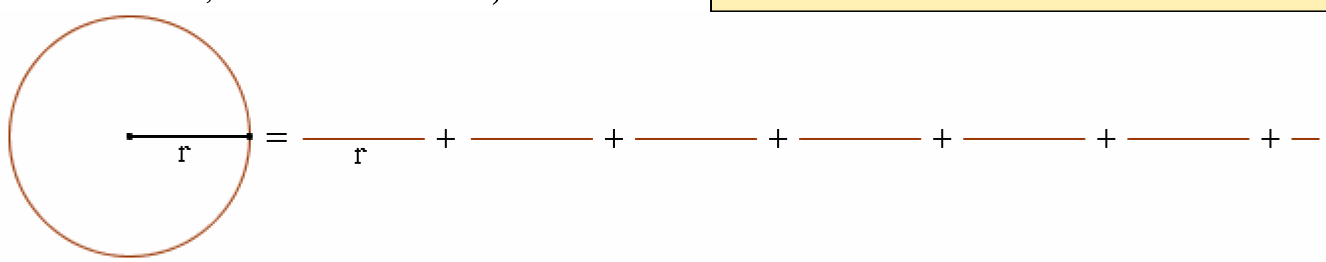


Per quanto riguarda la lunghezza della **circonferenza**, si ha

$$\boxed{\textbf{Lunghezza circonferenza} = 2\pi \cdot \textbf{raggio} \quad (L=2\pi r)}$$

ossia, la circonferenza è uguale a circa 6,28 volte il suo raggio (o anche: a circa 3,14 volte il suo diametro).

ESERCIZIO AL COMPUTER
Utilizza un *foglio elettronico* per calcolare, partendo da $\ell_6=1$, i valori di $\ell_{12}, \ell_{24}, \ell_{48}, \ldots$ e quelli dei SEMIperimetri dei rispettivi poligoni; tali semiperimetri approssimeranno π .



Un'**approssimazione più precisa** di π (con 50 cifre dopo la virgola) è:
π = 3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 ...

Comunque π **, essendo irrazionale (come fu dimostrato dal matematico francese Lambert nel 1761), ha dopo la virgola infinite cifre, e la successione delle cifre non presenta un "periodo"** (= gruppo che si ripete).

Anzi è stato dimostrato (Lindemann, tedesco, 1882) che π è addirittura "trascendente",
il che significa che **non esiste alcuna equazione a coefficienti razionali, di cui π possa essere soluzione**.

Importante conseguenza di questo fatto è l'impossibilità di effettuare la "quadratura del cerchio",
tanto a lungo inutilmente perseguita nell'antichità,
ossia di costruire, utilizzando esclusivamente la riga e il compasso per un numero finito di volte,
un quadrato la cui estensione sia esattamente uguale all'estensione di un cerchio assegnato.

ALCUNE FORMULE CHE COINVOLGONO π IN GEOMETRIA

- ❑ AREA CERCHIO $= \pi r^2$
- ❑ LUNGHEZZA CIRCONFERENZA $= 2\pi r$
- ❑ VOLUME SFERA $= \frac{4}{3}\pi r^3$
- ❑ AREA SUPERFICIE SFERICA $= 4\pi r^2$

ALCUNE FAMOSE E BELLE FORMULE PER IL CALCOLO DEL VALORE DI π

- ❑ $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\ldots=\frac{\pi}{4}$ (Leibniz)
- ❑ $\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\ldots=\frac{\pi}{2}$ (Wallis)
- ❑ $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{9\cdot 11}+\frac{1}{13\cdot 15}+\frac{1}{17\cdot 19}+\ldots=\frac{\pi}{8}$
- ❑ $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$ (Eulero)

In queste ultime formule, si hanno
delle "somme infinite" (nel senso di: "somme di infiniti addendi")
o dei "prodotti infiniti" (nel senso di: "prodotti di infiniti fattori")
e prendendo un certo numero di termini a partire da quello iniziale (esempio: i primi 5)
si ottiene un valore approssimato di π, con l'approssimazione che diventa
via via più precisa quanto più si fa alto il numero dei termini considerati.

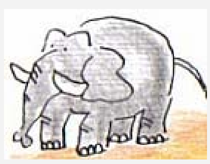
Su π si potrebbero dire tantissime cose.
Se l'argomento ti incuriosisce, puoi fare una ricerca su Internet, dove ad esso sono dedicati tantissimi siti.
Potresti cominciare da Wikipedia, l'enciclopedia libera.
Se vuoi fare delle ricerche su siti Inglesi, tieni presente che **in lingua inglese π si dice "pi" (pronuncia: pai)**.
π è spesso coinvolto in formule che attengono alla Fisica o alla Probabilità,
e in questioni matematiche di livello superiore.

Da tempo, con l'uso dei computer, è stato calcolato un numero colossale di cifre dopo la virgola di π.
Già nel 1997 erano state trovate più di 1000 miliardi di cifre dopo la virgola!
La ricerca di ulteriori cifre dopo la virgola di π prosegue,
ma ormai, dato il colossale numero di cifre già noto,
si tratta più che altro di una sfida matematico-tecnica
e di un'occasione per utilizzare e mettere alla prova i supercomputer.

Da Wikipedia:

la più pressante questione aperta su π riguarda il fatto che sia o meno "normale",
cioè se la frequenza con cui è presente ogni sequenza di cifre sia la stessa che ci si aspetterebbe
se le cifre fossero completamente casuali.
Questo, nel caso sia vero, deve essere vero in ogni base, non solo in base 10.
Non sappiamo molto, attualmente, a riguardo.

QUESITO (presente su parecchi siti Internet)



Una corda lunga quanto la circonferenza terrestre (cioè all'incirca 40000 km)
si trova distesa lungo l'equatore.
Si prende questa corda, la si taglia, se ne aggiunge 1 metro e la si redistribuisce attorno all'equatore in modo che la sua distanza dalla superficie terrestre si mantenga costante.
Quale dei seguenti tre animali può passare di misura nello spazio interposto tra la corda e la superficie: un elefante, un gatto o una formica? ⇨