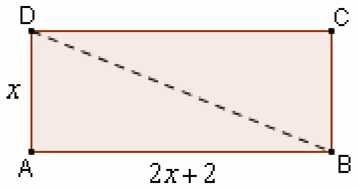
PROBLEMI GEOMETRICI

PROBLEMI GEOMETRICI DI 1° GRADO - ESEMPI SVOLTI

- In un rettangolo, la base supera di 2 cm il doppio dell'altezza e il perimetro è di 34 cm.
Trovare l'area e la diagonale.

Facciamo il **disegno,**
cercando di restare più fedeli possibile
ai dati del problema.
In questo caso, ad esempio,
occorrerà disegnare la base
in modo che sia lunga più del doppio dell'altezza …

Accanto ad disegno,
scriviamo tutti i dati,
sia quelli geometrici che quelli numerici.
E scriviamo anche,
con accanto dei punti interrogativi,
quali sono **le richieste del problema**.



ABCD rettangolo
$\mathrm{AB} = 2\mathrm{AD} + 2\ cm$
$2p(\mathrm{ABCD}) = 34\ cm$
$S(\mathrm{ABCD}) = ?\quad \mathrm{BD} = ?$

Valgono le solite indicazioni generali date in relazione ai problemi di soggetto qualsiasi:
la risoluzione di un problema a una incognita si può suddividere in 3 fasi 1), 2), 3)

1) Pongo la x:
$\boxed{\mathrm{AD} = x}$

♥ **La x** non deve per forza coincidere con una delle richieste del problema; **va scelta in modo che sia poi facile esprimere gli altri segmenti in gioco, per mezzo di x**

2) Esprimo gli altri segmenti in gioco per mezzo ("in funzione") di x:
$\boxed{\mathrm{AB} = 2x + 2}$

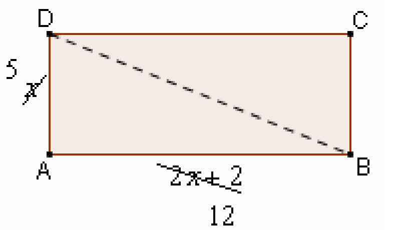
♥ **E' ESTREMAMENTE UTILE**
riportare sul disegno, in matita,
sia la x che le varie espressioni contenenti x via via ricavate.

3) Imposto l'equazione risolvente:
$\boxed{2(2x+2) + 2x = 34}$
$4x + 4 + 2x = 34$
$6x = 30$
$x = 5$

♥ **L'equazione risolvente si imposta utilizzando un dato che non sia mai stato sfruttato fino a quel momento**
(nel nostro caso, il perimetro).
Se ci servissimo, per l'equazione risolvente,
di un'informazione già utilizzata prima,
ci ritroveremmo fra le mani un'equazione *indeterminata*!

Quindi
$\mathrm{AD} = 5\ cm,$
$\mathrm{AB} = 2x + 2 = 10 + 2 = 12\ cm$ (NOTA 1)

Converrà a questo punto riportare
sulla figura i valori ottenuti!



$\boxed{S =}\ \mathrm{AB} \cdot \mathrm{AD} = 12 \cdot 5 = \boxed{60\ cm^2}$ (NOTA 2)

$\boxed{\mathrm{BD} =}\ \sqrt{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AD}^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} =$
$= \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = \boxed{13\ cm}$ (NOTA 3)

NOTA 1
A stretto rigore, l'unità di misura andrebbe indicata
in tutti gli anelli della catena e non solo nell'ultimo,
scrivendo quindi, in questo caso,
$\mathrm{AB} = (2x+2)\ cm = (10+2)\ cm = 12\ cm$
Tuttavia noi, per brevità, la scriveremo solo alla fine.

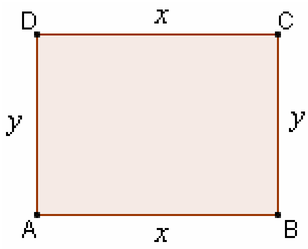
NOTA 2
L' "area" si può indicare con A oppure con S
(il termine "superficie" è usato, seppure impropriamente,
anche per indicare l' "area di una superficie").
*A rigore, "superficie" indica invece l'entità **geometrica**,*
*"area" il **numero** che esprime*
la misura dell'estensione di una superficie.

NOTA 3
Qui abbiamo applicato il Teorema di Pitagora
al triangolo rettangolo ABD.

Certo, **sovente sono possibili più risoluzioni alternative**!
Anche nel nostro caso: il dato *perimetro = 34* ci diceva che la somma *base+altezza* era *17*,
quindi avremmo potuto, ad es., porre
$base = x;\ altezza = 17 - x$ da cui l'equazione risolvente: $x = 2(17 - x) + 2;\ \ldots\ x = 12$ *eccetera*

- Trovare le dimensioni di un rettangolo nel quale
  il perimetro supera di 10 cm il triplo dell'altezza,
  e la differenza fra il triplo della base e il doppio dell'altezza è 12 cm.

Disegno



Dati

ABCD rettangolo
$2p(\mathrm{ABCD}) = 3\mathrm{AD} + 10\ cm$
$3\mathrm{AB} - 2\mathrm{AD} = 12\ cm$
$\mathrm{AB} = ?\quad \mathrm{AD} = ?$

Questa volta i dati sono tali che, comunque si ponga la *x*,
sarebbe poi un po' scomodo esprimere l'altro segmento in gioco per mezzo di *x*.
In questi casi è preferibile PORRE PIU' INCOGNITE e impostare un SISTEMA,
costituito da TANTE EQUAZIONI, QUANTE SONO LE INCOGNITE POSTE.

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathrm{AB} = \mathrm{DC} = x \\ \mathrm{AD} = \mathrm{BC} = y\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{cases} 2x + 2y = 3y + 10 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}}$$

Risolvendo ora il sistema, otteniamo:

$$2\cdot\begin{cases} 2x - y = 10 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 2y = 20 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l}(1)-(2) \\ (1)\end{array}\begin{cases} x = 8 \\ 2\cdot 8 - y = 10;\ \ 16 - y = 10;\ \ y = 6 \end{cases}$$

Quindi
$\mathrm{AB} = \mathrm{DC} = 8\ cm$
$\mathrm{AD} = \mathrm{BC} = 6\ cm$

♥ **La risoluzione in più incognite è consigliabile quando, comunque si ponga la *x*, è poi difficoltoso o se non altro scomodo esprimere per mezzo della *x* scelta, le altre quantità in gioco.**

In tal caso, si pongono due o più incognite, e si scrive un sistema, nel quale LE EQUAZIONI SIANO TANTE QUANTE LE INCOGNITE PRESENTI.

L'eventualità che il numero delle equazioni, indipendenti fra loro, che si possono impostare, sia diverso dal numero delle incognite, è assai rara nei problemi "scolastici".

Volendo, avremmo anche potuto risolvere con una incognita sola: se si osservano i dati

$$2p(\mathrm{ABCD}) = 3\mathrm{AD} + 10\ cm$$
$$3\mathrm{AB} - 2\mathrm{AD} = 12\ cm$$

si capisce che nell'ultima uguaglianza si può isolare con un paio di passaggi AB, ottenendo

$$3\mathrm{AB} = 2\mathrm{AD} + 12\ cm$$
$$\mathrm{AB} = \frac{2\mathrm{AD} + 12\ cm}{3}$$

per cui, se si pone ora $\boxed{\mathrm{AD} = x}$,

si ha $\boxed{\mathrm{AB} = \frac{2x + 12}{3}}$

e si può scrivere dunque l'equazione risolvente

$$2p(\mathrm{ABCD}) = 3\mathrm{AD} + 10\ cm$$
$$\boxed{2\cdot\frac{2x + 12}{3} + 2x = 3x + 10}$$

con la quale si trova $\boxed{x = \mathrm{AD} = 6}$.

Se confrontiamo i due metodi di risoluzione, vediamo che per *questo* particolare problema, pur essendo possibile risolvere con 1 sola incognita, la risoluzione con più incognite e quindi col sistema risulta essere più comoda, anche per la possibilità di risolvere il sistema col simpatico metodo di riduzione.

In generale, comunque, di fronte a un problema geometrico *la risoluzione con una incognita sola è preferibile*, perché di norma è più rapida, e perché mette maggiormente in risalto le interrelazioni fra le varie quantità.

Tranne, ribadiamolo, in quei casi in cui sia eccessivamente laborioso esprimere tutte le quantità in gioco, in funzione di una sola di esse.

❑ PROBLEMI GEOMETRICI DI PRIMO GRADO

1) ⇨ In un triangolo isoscele il lato obliquo è i 5/6 della base,
e la differenza fra base e lato obliquo è di 3 cm. Quanto misura il perimetro? E l'area?

2) In un triangolo isoscele, di perimetro 72 cm, il lato obliquo supera la base di 6 cm. Determina i tre lati.

3) Di un triangolo si conosce il perimetro (48 cm), e si sa che due dei lati hanno per somma 27 cm
e per rapporto 4/5. Quanto misura ciascuno dei tre lati?

4) ⇨ In un triangolo isoscele, la somma del triplo della base col doppio del lato obliquo misura 82 cm
mentre è di 19 cm la diff. fra il triplo del lato obliquo e il doppio della base. Determina il perimetro.

5) In un triangolo isoscele il lato obliquo è inferiore di 4 cm rispetto alla base. Il perimetro è di cm 64.
Trovare i lati, l'area, l'altezza relativa al lato obliquo.

6) In un triangolo rettangolo i cateti sono uno i ¾ dell'altro, e la loro somma misura cm 21.
Quanto misura il perimetro?

7) In un triangolo isoscele DEF, di base EF, si ha $EF + DE = m\ 11$, e $2EF + 3DE = m\ 27$.
Determina i lati del triangolo e la sua area.

8) Se il perimetro di un quadrato aumentasse di 8 cm, l'area aumenterebbe di $36\,cm^2$.
Quanto misura il lato del quadrato?

9) In un triangolo PQR i due angoli più ampi sono rispettivamente il doppio e il quintuplo del più piccolo.
Quanto misurano i tre angoli?

10) In un triangolo ABC si sa, riguardo agli angoli interni, che $3\widehat{A} + 2\widehat{B} = 195°$ e che $4\widehat{B} - 3\widehat{C} = 30°$.
Quanto misurano i tre angoli?

11) Determinare perimetro e area di un rombo del quale si conoscono la somma delle diagonali (62 cm)
e la loro differenza (34 cm).

12) Un trapezio isoscele ha la base minore uguale al lato obliquo. Il perimetro del trapezio misura 52 cm,
e la somma della quinta parte del lato obliquo con la metà della base maggiore vale 13 cm.
Determinare le misure dei quattro lati e dell'area.

13) ABCD è un trapezio rettangolo.
La base maggiore AB supera di 4 cm la somma di altezza e lato obliquo; questi differiscono di 8 cm,
mentre la differenza fra base maggiore e lato obliquo è di 9 cm.
Determinare il perimetro e l'area.

14) Di un trapezio isoscele si conoscono:
l'area $(44\ cm^2)$, l'altezza $(4\ cm)$ e il rapporto fra le due basi $(4/7)$. Quanto vale il perimetro?

15) Un parallelogrammo ha il perimetro di 2 m; un lato supera l'altro di 22 cm.
Quanto misurano i due lati?
Sapendo inoltre che la proiezione del lato magg. sul minore vale 11 cm, determinare l'area della figura.

16) Un rombo, nel quale le diagonali sono una i ¾ dell'altra, ha il perimetro di 60 cm.
Quanto misura l'area?

17) Un trapezio isoscele è circoscritto ad un cerchio.
Il suo perimetro è di cm 52, mentre la differenza fra le basi è di cm 10.
Determinare i lati e l'area del trapezio, nonché il raggio del cerchio inscritto.
(Occorre ricordare la proprietà che caratterizza ogni quadrilatero circoscritto a una circonferenza)

18) Un trapezio isoscele è circoscritto ad un SEMIcerchio.
Sapendo che la somma delle basi misura 38 cm, e che il lato obliquo supera di 13 cm la base minore,
determinare i lati del trapezio, e il diametro del semicerchio.
(Ricordare la proprietà che caratterizza il trapezio isoscele circoscritto a una semicirconferenza)

SOLUZIONI

1) 48 cm; 108 cm^2 2) 20 cm, 26 cm, 26 cm 3) 12 cm, 15 cm, 21 cm 4) 50 cm
5) lato obliquo = cm 20, base = cm 24, area = cm^2 192, h = cm 19,2 6) 2p = 36 cm
7) $EF = m\ 6$, $DE = DF = m\ 5$, $S = m^2\ 12$ 8) 8 cm 9) 22°30', 45°, 112°30' 10) 15°, 75°, 90°
11) 100 cm, 336 cm^2 12) 10 cm, 10 cm, 10 cm, 22 cm, 128 cm^2 13) 50 cm, 80 cm^2 14) 32 cm
15) 61 cm e 39 cm; 2340 cm^2 16) 216 cm^2
17) 13 cm, 13 cm, 18 cm, 8 cm, 156 cm^2, 6 cm 18) 17 cm, 17 cm, 34 cm, 4 cm; 16 cm