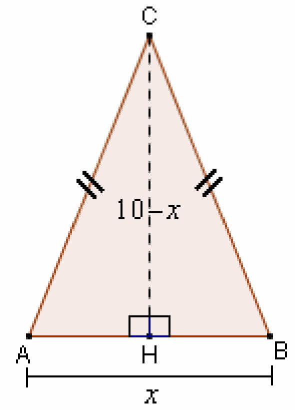
PROBLEMI GEOMETRICI DI 2° GRADO - ESEMPI SVOLTI

- In un triangolo isoscele la somma di base e altezza è 10 cm, e l'area è di 12 cm^2.
  Trovare il perimetro.

Disegno



Dati e richieste del problema

$CA = CB$
$CH \perp AB$
$AB + CH = 10 \text{ cm}$
$S(ABC) = 12 \text{ cm}^2$
$2p(ABC) = ?$

Risoluzione

1) Pongo la x: $\boxed{AB = x}$

2) Esprimo gli altri segmenti che mi servono in funzione di x:

$\boxed{CH = 10 - x}$

3) Imposto l'equazione risolvente:

$$\boxed{\frac{x(10-x)}{2} = 12} \quad (\textit{area} = 12)$$

$$x(10-x) = 24$$
$$10x - x^2 = 24$$
$$x^2 - 10x + 24 = 0$$
$$(x-6)(x-4) = 0$$
$$\boxed{x = 6 \vee x = 4}$$

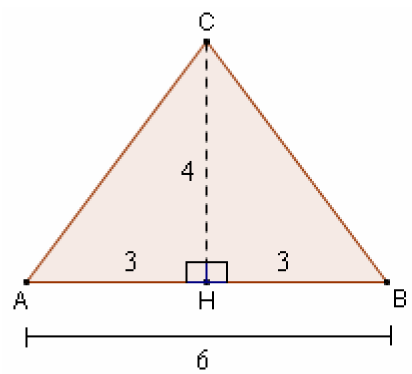
In questo caso il problema, che ha un'equazione risolvente di 2° grado, possiede *due* soluzioni, ma non sempre è così:

- a volte è $\Delta = 0$, quindi le soluzioni sono coincidenti, è come se ce ne fosse una sola;
- a volte è $\Delta < 0$, e il problema è impossibile;
- altre volte l'equazione ha, sì, due soluzioni, ma poi … una di esse è "non accettabile", da scartare (potrebbero essere anche entrambe non accettabili …)

Negli esercizi proposti potrai sperimentare una casistica molto varia.

Perciò **si hanno due possibilità, ci sono due distinti triangoli che risolvono il problema**:

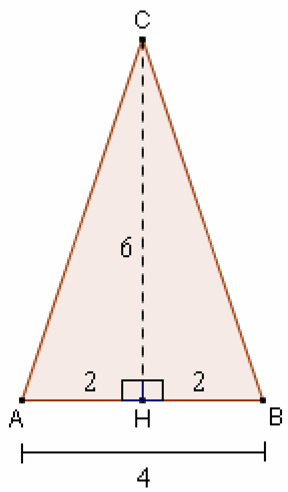
$AB = 6$ cm,
$CH = 10 - 6 = 4$ cm



$$CA = \sqrt{CH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

$\boxed{2p =}\ 5 + 5 + 6 = \boxed{16 \text{ cm}}$

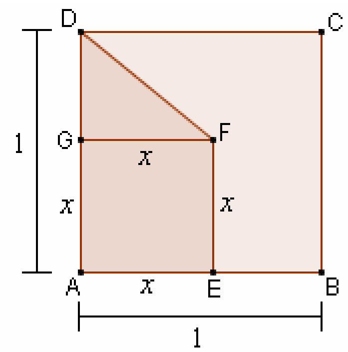
$AB = 4$ cm,
$CH = 10 - 4 = 6$ cm



$$CA = \sqrt{CH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ cm}$$

$\boxed{2p =}\ 2\sqrt{10} + 2\sqrt{10} + 4 = 4\sqrt{10} + 4 = \boxed{4\left(\sqrt{10}+1\right) \text{ cm}}$

- Un quadrato ABCD ha lato unitario.
  All'interno del lato AB è stato preso un punto E costruendo poi, internamente ad ABCD, un altro quadrato AEFG; infine si è congiunto F con D.
  L'area del trapezio AEFD risulta essere i 3/8 dell'area di ABCD.
  Quanto misura AE?



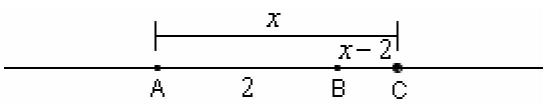
ABCD quadrato
AB = BC = CD = DA = 1
AEFG quadrato
$S(AEFD)=\frac{3}{8}\cdot S(ABCD)$
AE = ?

$AE=EF=FG=GA=x;\qquad S(AEFD)=\frac{(AD+EF)\cdot AE}{2}=\frac{(1+x)\cdot x}{2}$

Equazione risolvente: $\frac{(1+x)\cdot x}{2}=\frac{3}{8}\cdot 1^2;\quad \frac{x+x^2}{2}=\frac{3}{8};\quad 4x+4x^2=3;\quad 4x^2+4x-3=0;\quad x_{1,2}=\left\langle \begin{array}{l}\frac{1}{2}\\ -\frac{3}{2}\end{array}\right.$

La soluzione negativa è evidentemente da scartare (si dice anche che è NON ACCETTABILE).

- Su di una retta r ci sono due punti, A e B, a distanza 2 l'uno dall'altro.
  Alla retta appartiene anche un terzo punto C, per il quale si ha $2CA^2+CB^2=8$. Dove si trova C?



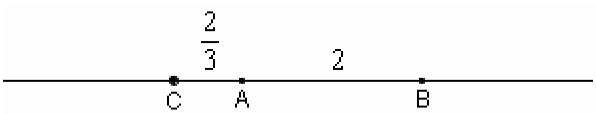
AB = 2
$2CA^2+CB^2=8$
Dove si trova C?

$AC=x,\ \ AB=2,\ \ CB=x-2$

Equazione risolvente: $2x^2+(x-2)^2=8;\quad 2x^2+x^2-4x+4=8;\quad 3x^2-4x-4=0;\quad x_{1,2}=\left\langle \begin{array}{l}2\\ -\frac{2}{3}\end{array}\right.$

La soluzione $x=2$ corrisponde alla situazione in cui C coincide con B, è sovrapposto a B:
in effetti, in questo caso è $CA=AB=2$ e $CB=0$,
quindi si ha proprio $2CA^2+CB^2=2\cdot 2^2+0^2=8+0=\boxed{8}$.

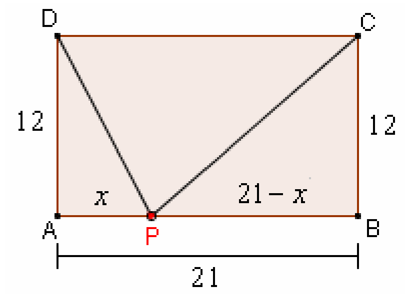
Ma PER QUESTO PROBLEMA ANCHE LA SOLUZIONE NEGATIVA E' ACCETTABILE:
essa corrisponde infatti al punto C posizionato A SINISTRA del punto A



e in questo caso si ha ancora $2CA^2+CB^2=2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}+2\right)^2=2\cdot\frac{4}{9}+\left(\frac{8}{3}\right)^2=\frac{8}{9}+\frac{64}{9}=\frac{72}{9}=\boxed{8}$

In definitiva, di fronte alle soluzioni trovate per un problema,
bisogna sempre chiedersi se siano accettabili oppure no:
si tratta di andare a vedere quali sono, per il problema, le limitazioni alle quali è soggetta la nostra "*x*";
e **a volte, anche una soluzione negativa può avere una "interpretazione",**
e magari, per taluni problemi, risultare accettabile! **Approfondimento:** ⇨

- Un rettangolo ABCD ha base AB = 21 cm e altezza AD = 12 cm.
  Determinare, sul segmento AB, un punto P **IN MODO CHE** risulti: $PD^2 + PC^2 = 569\ cm^2$.



$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90°$

$AB = 21\ cm,\ \ AD = 12\ cm$

? P su AB **in modo che** $PD^2 + PC^2 = 569\ cm^2$
CONDIZIONE

Attenzione! Questo è un problema "D.O.C"!

I problemi di questa tipologia, nei quali è richiesto
di **determinare un punto** (su di un segmento, o una
semiretta, o una retta, o una circonferenza, ecc. ecc.)
IN MODO CHE sia verificata una certa CONDIZIONE,
sono particolarmente importanti.

Sono anche, fortunatamente, problemi "strutturalmente facili", ossia
la loro risoluzione consiste sempre in un medesimo **procedimento "standard"**.
Si tratta di:

1) **PORRE l'incognita *x***
2) **ESPRIMERE per mezzo di *x*, tutte le quantità che compaiono nella *CONDIZIONE***
3) **SOSTITUIRE** nella ***CONDIZIONE*** le espressioni trovate,
   ottenendo così l'equazione risolvente.

Nel nostro caso:

1) è richiesto di localizzare la posizione che deve occupare il punto P, sul segmento AB, affinché ecc.ecc.
E' chiaro che la posizione di P è individuata quando si conosca la sua distanza da una qualsiasi delle due estremità di AB. Quindi, porremo come incognita AP oppure PB.
Ad esempio, possiamo **porre** $\boxed{AP = x}$.

2) Ora dobbiamo **esprimere** per mezzo di x i due segmenti PD e PC, o meglio i loro quadrati.
Con Pitagora su APD e BPC, otteniamo:

$$\boxed{\begin{array}{l} PD^2 = AP^2 + AD^2 = x^2 + 144 \\ PC^2 = PB^2 + BC^2 = (21 - x)^2 + 144 \end{array}}$$

3) Non ci resta che **sostituire** le espressioni trovate nella condizione $PD^2 + PC^2 = 569\ cm^2$
ed ecco la nostra l'equazione risolvente:

$$\boxed{x^2 + 144 + (21 - x)^2 + 144 = 569}$$

$$x^2 + 144 + 441 - 42x + x^2 + 144 = 569$$

$$\cancel{2}x^2 - \cancel{42}^{21}x + \cancel{160}^{80} = 0$$

$$\boxed{x_{1,2} =} \frac{21 \pm \sqrt{441 - 320}}{2} = \frac{21 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{21 \pm 11}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \boxed{5} \\ \boxed{16} \end{array} \right.$$

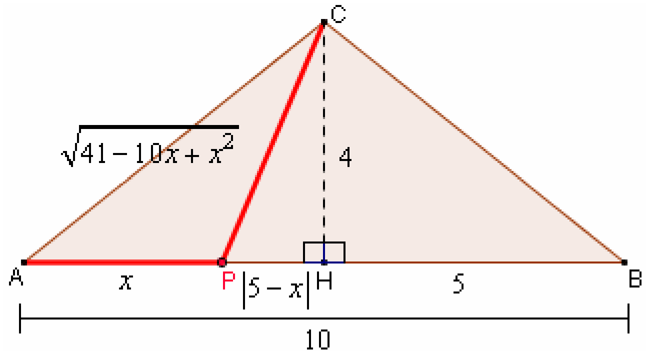
Dunque, affinché risulti $PD^2 + PC^2 = 569\ cm^2$, dev'essere $\boxed{AP = 5\ cm}$ o in alternativa $\boxed{AP = 16\ cm}$.

Come istruttiva verifica, calcola i valori di PD^2 e di PC^2 nell'ipotesi che sia $AP = 5\ cm$: constaterai che si ha proprio $PD^2 + PC^2 = 569\ cm^2$. E analogamente supponendo $AP = 16\ cm$.

Il fatto che si siano trovate due soluzioni, corrispondenti a due posizioni di P *alla medesima distanza* da una delle estremità di AB, era *prevedibile* considerando l'evidente "*simmetria*" del problema: prese due posizioni di P, una a una certa distanza da A e l'altra a distanza uguale, ma da B, i valori delle lunghezze dei due segmenti PD e PC si scambiano, quindi la somma dei quadrati di tali valori resta invariata.
Fin dall'inizio si poteva quindi capire che questo problema, nel caso ammettesse una soluzione, *doveva* necessariamente averne anche una seconda, "gemella" rispetto alla prima.

- Sulla base AB = 10 cm di un triangolo isoscele ABC, la cui altezza CH misura 4 cm, determinare un punto P **in modo che** risulti $PA^2 + 5PC^2 = 129\ cm^2$

Disegno



Dati e richieste del problema

$CA = CB$
$AB = 10\ cm$
$CH = 4\ cm\ (CH \perp AB)$
? P su AB **in modo che**
$PA^2 + 5PC^2 = 129\ cm^2$

Risoluzione

1) PONGO la x : $\boxed{PA = x}$

2) ESPRIMO gli altri segmenti che mi servono in funzione di x :

$AH = \frac{AB}{2} = 5$

$PH = \boxed{|5-x|}$ (NOTA)

$PC = \sqrt{PH^2 + CH^2} = \sqrt{|5-x|^2 + 4^2}$

$= \sqrt{25 - 10x + x^2 + 16} = \boxed{\sqrt{41 - 10x + x^2}}$

3) SOSTITUISCO nella relazione data per impostare l'equazione risolvente :

$\boxed{x^2 + 5(41 - 10x + x^2) = 129}$

$x^2 + 205 - 50x + 5x^2 = 129$

$6x^2 - 50x + 76 = 0; \quad 3x^2 - 25x + 38 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{25 \pm \sqrt{625-456}}{6} = \frac{25 \pm \sqrt{169}}{6} = \frac{25 \pm 13}{6} = \left\langle \begin{array}{l} \boxed{2} \\ \boxed{\frac{19}{3}} \end{array} \right.$$

Quindi può essere $\boxed{PA = 2\ cm}$ oppure $\boxed{PA = cm\,\frac{19}{3}}$

Facciamo la **verifica**.

Con **PA = 2** avremmo

$PH = 3$ e $PC = \sqrt{PH^2 + CH^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, da cui

$\mathbf{PA^2 + 5PC^2} = 2^2 + 5 \cdot 5^2 = 4 + 5 \cdot 25 = 4 + 125 = \mathbf{129}$, ok

Con $\mathbf{PA = \frac{19}{3}}$ avremmo

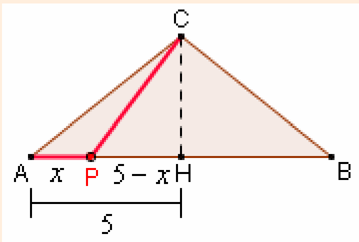
$PH = 19/3 - 5 = 4/3$

$PC = \sqrt{PH^2 + CH^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + 16} = \sqrt{\frac{160}{9}} = \frac{4}{3}\sqrt{10}$, da cui

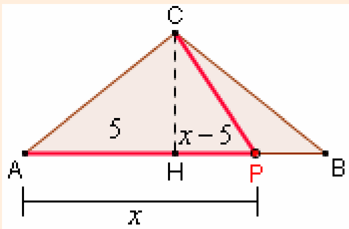
$\mathbf{PA^2 + 5PC^2} = \left(\frac{19}{3}\right)^2 + 5 \cdot \frac{160}{9} = \ldots = \frac{1161}{9} = \mathbf{129}$, ok

NOTA
Certamente ti chiederai perché abbiamo introdotto il **valore assoluto** scrivendo $PH = |5-x|$ anziché $PH = 5 - x$.

Il fatto è che noi **non sappiamo se il punto P**, affinché sia verificata l'uguaglianza richiesta, **deve trovarsi a sinistra di H oppure a destra di H**.
Nel primo caso avremmo



mentre nel secondo caso sarebbe



Quindi, in pratica,
il valore corretto per il segmento PH si ottiene facendo la differenza fra 5 e x "dal maggiore al minore", o anche: facendo la differenza fra 5 e x e, nel caso si ottenga un numero negativo, mutando questo risultato in positivo; ma ciò equivale, appunto, a fare
$|5-x|$ (o, il che è lo stesso, $|x-5|$).

Notiamo tuttavia che in *questo* particolare problema il segmento in questione è utilizzato esclusivamente "al quadrato", e siccome
$|5-x|^2 = |x-5|^2 = (x-5)^2 = (5-x)^2$
se anche uno studente dimenticasse di mettere le stanghette di valore assoluto, farebbe giusto lo stesso.

❑ PROBLEMI GEOMETRICI DI SECONDO GRADO

1) ⇨ Determinare base e altezza di un rettangolo di area $60\ cm^2$ sapendo che la somma dell'altezza col triplo della base dà 27 cm.

2) ⇨ In un triangolo isoscele ABC, di base AB, il perimetro misura 16 cm, e la somma dei quadrati costruiti sui tre lati misura $86\ cm^2$. Determinare i lati e l'area di ABC.

3) Un quadrato ABCD ha il lato che misura 2a.
All'interno dei lati del quadrato, procedendo sempre nello stesso senso (ad es., in senso antiorario) prendi quattro segmenti: AE; $BF = 2 \cdot AE$; $CG = 3 \cdot AE$; $DH = 4 \cdot AE$.
Quanto deve misurare il segmento AE affinché l'area del quadrilatero irregolare EFGH misuri $2a^2$?

4) Da un foglio rettangolare lungo cm 12 e largo cm 9, si ritaglia, lungo ciascuno dei 4 lati, una striscia di larghezza *x*.
Quanto deve valere *x* se si vuole che l'area del rettangolo ottenuto dopo il ritaglio sia di $54\ cm^2$?

5) ⇨ Nel trapezio rettangolo ABCD il lato obliquo BC misura 10 cm e la base minore CD 16 cm. La somma dell'altezza con la base maggiore vale cm 30. Determinare l'area del trapezio.
(In questo problema si può applicare il teorema di Pitagora per impostare l'equazione risolvente)

6) Determinare il lato obliquo AC = BC di un triangolo isoscele ABC di perimetro 36 cm, *in modo che* (vedi pag. 248 per un esempio di problema di questo tipo) si abbia: $AB^2 + AC^2 = 269\ cm^2$.

7) Sul diametro AB = 10 cm di una semicirconferenza, determinare un punto P in modo che, tracciata da P la perpendicolare ad AB fino ad incontrare la semicirconferenza in Q, il quadrato costruito sul segmento PQ abbia l'area di $16\ cm^2$.

8) In un trapezio rettangolo in cui base maggiore e altezza misurano entrambe cm 4, la somma dei quadrati dei quattro lati vale $cm^2\ 58$. Trovare la base minore.

9) In un triangolo isoscele il lato supera l'altezza relativa alla base di 8 cm, e a sua volta la base supera il lato di 11 cm. Trovare le misure della base e del lato obliquo.

10) In un trapezio di area $96\ cm^2$ la base minore è doppia dell'altezza.
Determinare le due basi, sapendo che la loro differenza è di 8 cm.

11) Un rettangolo ABCD ha la base AB lunga 14 cm, mentre l'altezza AD misura 8 cm.
Si chiede di determinare, sulla retta AB, un punto P in modo che si abbia: $3AP^2 + PC^2 = 292\ cm^2$.

12) In un trapezio isoscele ABCD, con la base maggiore AB doppia dell'altezza, la base minore misura 2a, e la somma dei quadrati dei quattro lati vale $118a^2$. Determinare il perimetro.

13) Internamente ad un segmento AB = 10k, determinare un punto P (con AP < PB) tale che, costruendo su AP e su PB rispettivamente il quadrato APCD e il quadrato PBEF (entrambi dalla stessa parte rispetto ad AB), l'area del pentagono irregolare ABEFD misuri $64k^2$.

14) La somma dei cateti di un triangolo rettangolo misura 27b, e l'area $63b^2$. Determinare i cateti.

15) Dividere un segmento di lunghezza 12a in due parti tali che la somma dei quadrati costruiti su ciascuna di esse sia $80a^2$.

16) In un trapezio circoscrivibile ad una circonferenza i lati obliqui misurano rispettivamente 9 e 11 cm.
Determinare le basi sapendo che la somma del quadrato di una di esse col triplo del quadrato dell'altra vale $cm^2\ 300$.

17) Risolvere il problema precedente sostituendo al posto del dato "$cm^2\ 300$" il dato "$cm^2\ 800$".

18) Determinare il perimetro di un triangolo rettangolo ABC di ipotenusa 20a, nel quale l'altezza CH relativa all'ipotenusa supera di 4a il segmento AH.

19) E' data una semicirconferenza di diametro AB = 2r.
Si vuole determinare, su AB, un punto P in modo che, alzata da P la perpendicolare al diametro fino ad incontrare la semicirconferenza in C, valga la relazione

$$CA^2 + CP^2 = \frac{19}{25} r^2.$$

(Indicazione: congiungere C con le estremità del diametro; essendo il triangolo ABC rettangolo in C perché …, si potranno applicare i teoremi di Euclide)

20) Un trapezio isoscele è inscritto in una semicirconferenza di diametro 2r.
Determinarne la base minore, sapendo che la somma dei quadrati dei quattro lati misura $7r^2$.

21) Un trapezio isoscele è circoscritto ad una semicirconferenza di diametro 2r.
Determinarne la base minore, sapendo che questa è uguale alla quinta parte della base maggiore.

22) Un trapezio isoscele è inscritto in una circonferenza di diametro 2r. Determinarne le basi sapendo che esse hanno distanze dal centro una doppia dell'altra, e che la differenza dei loro quadrati misura $4/3\ r^2$.

SOLUZIONI

1) base = 4 cm e altezza = 15 cm *oppure* base = 5 cm e altezza = 12 cm

2) lato obliquo = 5 cm, base = 6 cm, area = 12 cm^2,
oppure lato obliquo = cm $\frac{17}{3}$, base = cm $\frac{14}{3}$, area = cm^2 $\frac{28}{9}\sqrt{15}$

3) a/3 oppure a/2

4) 1,5 cm (si trova anche un'altra soluzione, x = 9, evidentemente non accettabile)

5) area = 152 cm^2 (base maggiore = cm 22, altezza = cm 8),
oppure area = 120 cm^2 (base maggiore = cm 24, altezza = cm 6)

6) AC = 13 cm *oppure* AC = 15,8 cm

7) AP = 2 cm *oppure* AP = 8 cm

8) Può misurare 1 cm *oppure* 3 cm

9) Porre *altezza* = x;
altezza = 5 cm, base = 24 cm, lato obliquo = 13 cm,
oppure: altezza = 21 cm, base = 40 cm, lato obliquo = 29 cm

10) Posto x = altezza, si trova:
$x = -8$ (soluzione ovviamente non accettabile, in quanto non avrebbe senso un'altezza negativa)
oppure $x = 6$ (da cui: base minore = 12 cm, base maggiore = 20 cm)

11) Posto AP = x, si trova: $x = 8 \vee x = -1$
In questo caso anche la soluzione negativa è accettabile: corrisponde ad una situazione in cui il punto P si trova, non sul segmento AB, ma sul suo prolungamento dalla parte di A.
Il testo del problema richiedeva che il punto P si trovasse sulla RETTA AB, non sul SEGMENTO AB.
Se il testo avesse invece parlato del SEGMENTO AB, la soluz. negativa non sarebbe stata accettabile.

12) Posto x = altezza, si trova $x = -\frac{7}{2}a$ (non accettabile) *oppure* $x = 4a$ (da cui: $2p = 20a$)

13) Posto AP = x, si trova x = 3k (l'altra soluzione x = 12k non è accettabile,
perché P andrebbe a cadere fuori dal segmento AB, mentre il testo dice che deve cadere all'interno).

14) Indicata con x la misura incognita di uno dei cateti, si trova
x = 6b (e quindi: altro cateto = 21b) *oppure* x = 21b (e quindi: altro cateto = 6b)
Perciò, in questo caso, sebbene l'equazione risolvente abbia due soluzioni distinte,
in pratica esiste un solo triangolo che risolve il problema: quello i cui cateti misurano 6b e 21b.

15) Le due parti misurano: una 4a e l'altra 8a.

16) Si trova un'equazione risolvente con $\Delta = 0$, quindi con due soluzioni coincidenti
(se si preferisce: una sola soluzione). Le basi misurano 15 cm e 5 cm.

17) L'equazione risolvente ammette due soluzioni distinte, da cui si traggono come valori per le basi
$5\left(3-\sqrt{5}\right),\ 5\left(1+\sqrt{5}\right)$
in quanto l'altra coppia $5\left(3+\sqrt{5}\right),\ 5\left(1-\sqrt{5}\right)$ non è accettabile, essendo $5\left(1-\sqrt{5}\right) < 0$.

18) $AH = 2a,\ CH = 6a,\ HB = 18a \to 2p(ABC) = 4a\left(5+2\sqrt{10}\right)$
oppure $AH = 4a,\ CH = 8a,\ HB = 16a \to 2p(ABC) = 4a\left(5+3\sqrt{5}\right)$

19) $AP = \frac{r}{5}$ 20) base min. $= r$ 21) base min. $= \frac{2}{3}r$ 22) base magg. $= \frac{4}{3}r\sqrt{2}$, base min. $= \frac{2}{3}r\sqrt{5}$