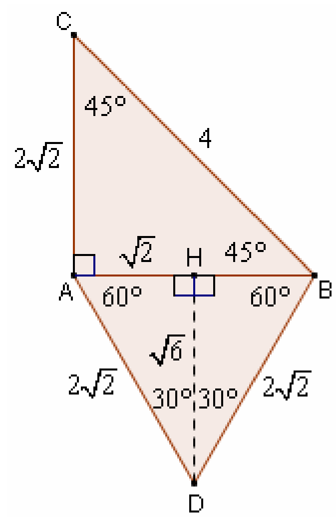
PROBLEMI CON TRIANGOLI RETTANGOLI PARTICOLARI - ESEMPI SVOLTI

- Sul lato AB del triangolo ABC, rettangolo in $\hat{A}$ e isoscele, si costruisce il triangolo equilatero ABD. E' noto che $BC = 4$ cm; si desidera determinare perimetro e area del quadrilatero ACBD.



$B\hat{A}C = 90°$

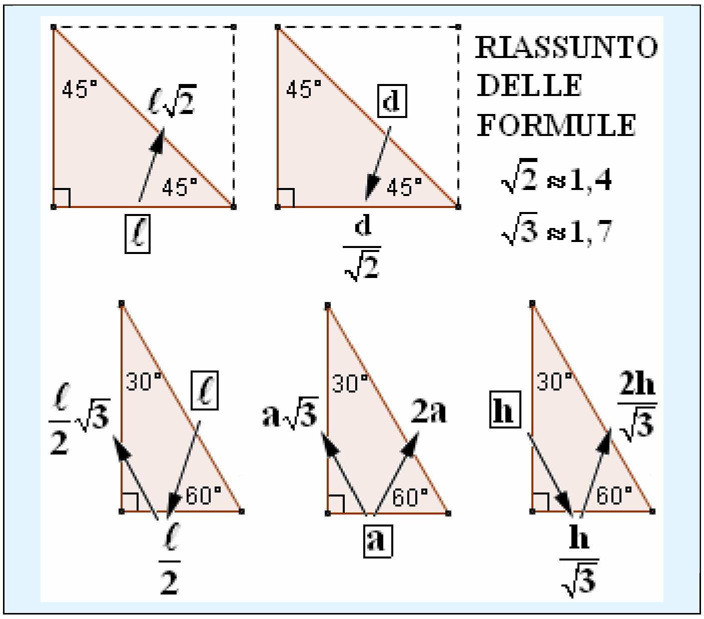
$AB = AC$

$AD = DB = AB$

$BC = 4$ cm

$2p(ACBD) = ?$

$S(ACBD) = ?$



Innanzitutto, il triangolo ABC, essendo *rettangolo* e *isoscele*, ha gli angoli acuti di 45°.

$AB = AC = \dfrac{BC}{\sqrt{2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\cancel{4}^{\,2}\sqrt{2}}{\cancel{2}} = 2\sqrt{2}$ cm, e allora anche $AD = DB = 2\sqrt{2}$ cm.

Tracciata l'altezza DH di ABD, avremo $AH = HB = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}} = \sqrt{2}$ cm

ed essendo AHD un triangolo rettangolo "particolare" (90°, 60°, 30°) sarà: $HD = AH\sqrt{3} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ cm.

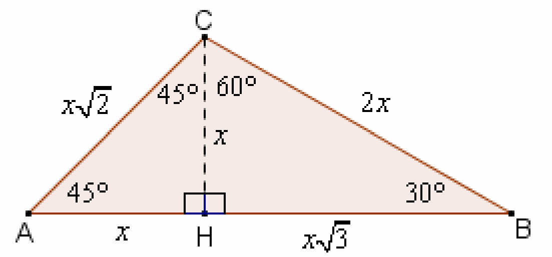
Ora $\boxed{2p(ACBD) =}\ 4 + 3 \cdot 2\sqrt{2} = 4 + 6\sqrt{2} = \boxed{2\left(2 + 3\sqrt{2}\right) \text{ cm}}$ e, per quanto riguarda l'area,

$\boxed{S(ACBD)} = S(ABC) + S(ABD) = \dfrac{\cancel{2}\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}{\cancel{2}} + \dfrac{\cancel{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}}{\cancel{2}} = 2 \cdot 2 + \sqrt{12} = 4 + 2\sqrt{3} = \boxed{2\left(2 + \sqrt{3}\right) \text{ cm}^2}$.

- Un triangolo ABC ha i due angoli di vertice A e B che misurano 45° e 30° rispettivamente. Si sa che il perimetro del triangolo misura $2a\left(3 + \sqrt{3} + \sqrt{2}\right)$. Quanto misura la sua area?

Tracciando l'altezza CH relativa ad AB il triangolo ABC ne risulta spezzato in due triangoli rettangoli "particolari" ...

Per questo problema, è necessario porre una incognita, e conviene scegliere $CH = x$.



Si avrà

$AH = CH = x,$

poi $AC = x\sqrt{2}$ $(AHC: 90°, 45°, 45°)$

e $CB = 2x,\ HB = x\sqrt{3}$ $(CHB: 90°, 30°, 60°)$

Equazione risolvente:

$x\sqrt{2} + x + x\sqrt{3} + 2x = 2a\left(3 + \sqrt{3} + \sqrt{2}\right);$

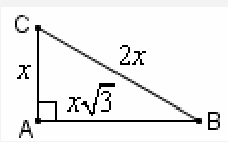
$x\sqrt{2} + x\sqrt{3} + 3x = 2a\left(3 + \sqrt{3} + \sqrt{2}\right);$

$x\cancel{\left(\sqrt{2} + \sqrt{3} + 3\right)} = 2a\cancel{\left(3 + \sqrt{3} + \sqrt{2}\right)}$

da cui $CH = 2a,\ AB = 2a + 2a\sqrt{3} = 2a\left(1 + \sqrt{3}\right)$

$\boxed{S(ABC)} = \dfrac{AB \cdot CH}{2} = \dfrac{\cancel{2}a\left(1 + \sqrt{3}\right) \cdot 2a}{\cancel{2}} = \boxed{2a^2\left(1 + \sqrt{3}\right)}$

Un errore che si può commettere in problemi di questo tipo è di esprimere tutti e tre i lati di un triangolo rettangolo "particolare" con l'uso delle formule, poi applicare Pitagora per impostare l'equazione risolvente. Purtroppo però l'equazione così ottenuta … non porta da nessuna parte perché è indeterminata! Infatti *le formule stesse* sono state ricavate tramite il teorema di Pitagora, quindi il procedimento equivale a riutilizzare la stessa informazione per due volte!!!



$x^2 + \left(x\sqrt{3}\right)^2 = (2x)^2$

$x^2 + 3x^2 = 4x^2$

$4x^2 = 4x^2$ *INDETERMINATA!* ☹

❑ PROBLEMI CON TRIANGOLI RETTANGOLI “PARTICOLARI” (90°/30°/60°, 90°/45°/45°)

1) ⇨ Nel triangolo ABC è $\hat{A}=60°$, $\hat{B}=45°$, e l’altezza CH misura cm 6. Trova perimetro e area di ABC.

2) Un trapezio isoscele ABCD ha gli angoli adiacenti alla base maggiore AB uguali a 60°, e AD = DC = CB = 10 cm. Determinarne perimetro e area.

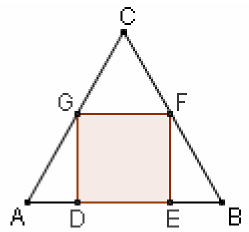
3) Calcolare perimetro e area di un trapezio rettangolo ABCD, in cui altezza e base minore sono uguali, l’angolo acuto $\hat{B}$ misura 30°, e la diagonale minore AC è lunga $a\sqrt{6}$.

4) ⇨ Sapendo che in un triangolo di area $8k^2\sqrt{3}$ due lati sono uno il doppio dell’altro e formano un angolo di 120°, determinare il terzo lato.

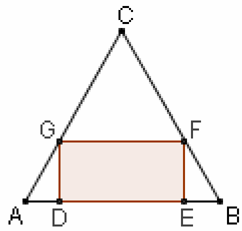
5) Il triangolo isoscele ABC ha la base maggiore AB che supera di 1 cm il lato obliquo. Determina i lati di ABC, sapendo che la somma delle aree dei tre triangoli equilateri costruiti sui suoi lati vale $cm^2\,\frac{43}{2}\sqrt{3}$.

6) ⇨ Sul lato AB di un triangolo equilatero ABC si prende il punto P tale che sia $AP=2PB$. Da P si traccia poi la parallela al lato BC, fino ad incontrare il lato AC in Q. Determinare il lato del triangolo equilatero in modo che la diagonale del trapezio BCQP misuri $a\sqrt{7}$.

7) Quanto misura il lato del quadrato inscritto (vedi figura) in un triangolo equilatero di lato 1 m?



8) In un triangolo equilatero di lato unitario, si inscrive (vedi figura) un rettangolo la cui base è doppia dell’altezza. Quanto misura l’area del rettangolo?



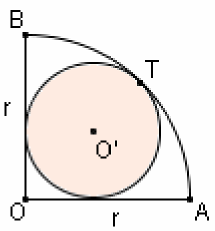
9) Dato un segmento AB di lunghezza a, determinare al suo interno un punto P in modo che, costruiti (dalla stessa parte rispetto ad AB) i due triangoli equilateri APC e PBD, e congiunto C con D, il triangolo CPD risulti i 3/16 del triangolo equilatero di lato AB.

10) Disegna un triangolo equilatero ABC il cui lato misuri ℓ. In ABC inscrivi un rettangolo DEFG (la base DE del rettangolo è una parte del segmento AB; F sta su BC, G sta su CA). Traccia le diagonali DF, EG del rettangolo e indica con O il punto in cui si tagliano. Determina ora il segmento $AD=x$ in modo che la somma dei quadrati dei lati del triangolo DOG misuri $\ell^2/2$.

11) Sulla diagonale AC di un quadrato ABCD, di lato 4a, determinare un punto P in modo che il quadrilatero ABPD sia equivalente ad un triangolo equilatero, avente il lato uguale al lato del quadrato.

12) All'interno di un quadrato ABCD di lato ℓ si disegna il triangolo equilatero ABE. La diagonale AC del quadrato taglia il segmento BE in F. Quanto misurano i due segmenti FB, FE?

13) Quanto misura il raggio di un cerchio, inscritto in un quadrante (= quarta parte di cerchio: vedi figura) di raggio r?



♥ *Controlla sempre se il valore della soluzione da te trovata è “plausibile”, cioè se può andar d’accordo con le misure nella figura, tenendo conto che* $\sqrt{2}\approx 1{,}4$ *e* $\sqrt{3}\approx 1{,}7$

14) E’ dato un triangolo equilatero ABC di lato ℓ. Sul lato AB si prenda un punto P tale che, dette H e K le proiezioni di P su CA e su CB rispettivamente, il triangolo PHK sia equivalente a 1/6 di ABC.

SOLUZIONI

1) $2p=cm\ 6\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right);\quad S=cm^2\ 6\left(\sqrt{3}+3\right)$ 2) $2p=cm\ 50,\ S=cm^2\ 75\sqrt{3}$

3) $2p=a\left(3+5\sqrt{3}\right);\quad S=\frac{3}{2}a^2\left(2+\sqrt{3}\right)$ 4) $4k\sqrt{7}$ 5) CA = CB = 5 cm, AB = 6 cm

6) 3a 7) lato quadrato $=m\left(2\sqrt{3}-3\right)$ 8) $S=\frac{3}{4}\left(2-\sqrt{3}\right)$ 9) $AP=\frac{1}{4}a \ \vee\ AP=\frac{3}{4}a$

10) $x=\frac{4}{13}\ell \ \vee\ x=0$ (soluz. "degenere", quest'ultima, che sta alla nostra discrezione di accettare o scartare)

11) $AP=a\sqrt{6}$ 12) $FB=\ell\left(\sqrt{3}-1\right);\ FE=\ell\left(2-\sqrt{3}\right)$ 13) $r\left(\sqrt{2}-1\right)$ 14) $AP=\frac{1}{3}\ell \ \vee\ AP=\frac{2}{3}\ell$