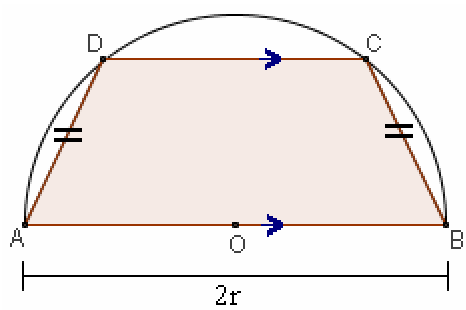
PROBLEMI GEOMETRICI CON EQUAZIONE RISOLVENTE IRRAZIONALE
ESEMPIO SVOLTO

- In una semicirconferenza di diametro 2r,
  inscrivere un trapezio isoscele di perimetro $\frac{19}{4}\mathrm{r}$.



Si può interpretare come un "problema IN MODO CHE":
"in una semicirconferenza di diametro 2r,
inscrivere un trapezio isoscele
in modo che il perimetro di tale trapezio misuri $\frac{19}{4}\mathrm{r}$".

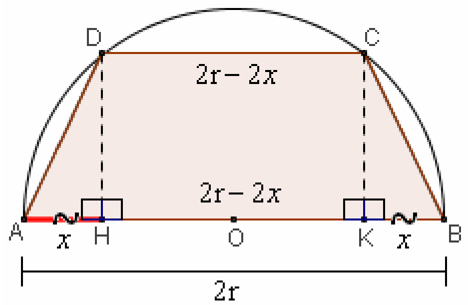
Ma *che cosa* domanda, in definitiva, il problema?
Che cosa intende che noi dobbiamo determinare?
Beh, il problema ci richiede di determinare un segmento, noto il quale sia *individuato in modo univoco* quel trapezio isoscele inscritto, il cui perimetro valga proprio $\frac{19}{4}\mathrm{r}$.
L'incognita dev'essere dunque "un elemento che individui la figura",
ossia un segmento a partire dal quale la figura sia tracciabile senza alcuna ambiguità.
Nel caso dei problemi sulla semicirconferenza, l'esperienza mostra che
è conveniente, di norma, porre come incognita un segmento giacente sul diametro.

Ad esempio, **un'ottima scelta è porre AH =** $\boldsymbol{x}$.

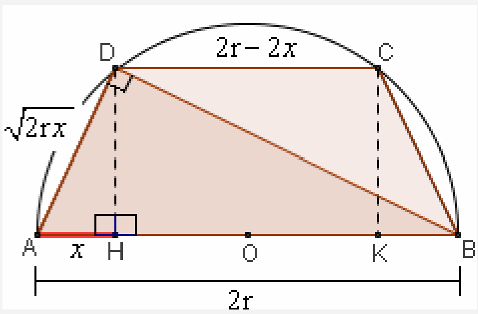
Ora si tratta di esprimere, in funzione della x scelta,
i segmenti che compaiono nel perimetro
(a parte, ovviamente, AB che è già noto e vale 2r).

Abbiamo subito
$\mathrm{DC}=\mathrm{HK}=\mathrm{AB}-(\mathrm{AH}+\mathrm{KB})=\mathrm{AB}-2\mathrm{AH}=2\mathrm{r}-2x$,
e così la base minore è "sistemata".

Per quanto riguarda il **lato obliquo**,
possiamo procedere in **due modi**:



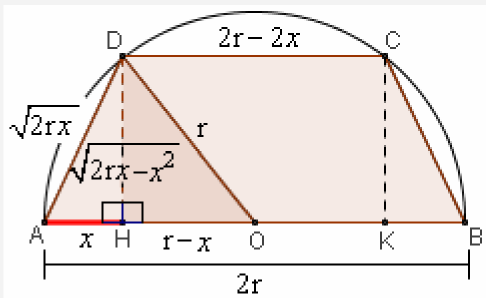
I° modo
Tracciamo la congiungente DB.



$\mathrm{A}\hat{\mathrm{D}}\mathrm{B}=90°$ perché inscritto in una semicirconferenza!
Dunque il triangolo ADB è rettangolo,
DH ne è l'altezza relativa all'ipotenusa,
e possiamo applicare il 1° Teorema di Euclide
ottenendo:

$$\mathrm{AD}=\sqrt{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AH}}=\sqrt{2\mathrm{r}\cdot x}$$

II° modo
Tracciamo il raggio OD.



Dapprima, con Pitagora su OHD, otteniamo :

$$\mathrm{DH}=\sqrt{\mathrm{OD}^2-\mathrm{OH}^2}=\sqrt{\mathrm{r}^2-(\mathrm{r}-x)^2}=$$
$$=\sqrt{\cancel{\mathrm{r}^2}\cancel{-\mathrm{r}^2}+2\mathrm{r}x-x^2}=\sqrt{2\mathrm{r}x-x^2}$$

poi, nuovamente con Pitagora ma su AHD,

$$\mathrm{AD}=\sqrt{\mathrm{AH}^2+\mathrm{DH}^2}=\sqrt{x^2+\left(\sqrt{2\mathrm{r}x-x^2}\right)^2}=$$
$$=\sqrt{\cancel{x^2}+2\mathrm{r}x\cancel{-x^2}}=$$
$$=\sqrt{2\mathrm{r}x}$$

Bene!

In un modo o nell'altro, si trova dunque sempre $AD=\sqrt{2rx}$.

Scriviamo ora l'**equazione risolvente**:

$$AB+DC+2AD=\frac{19}{4}r \qquad \underbrace{2r}_{AB}+\underbrace{2r-2x}_{DC}+2\underbrace{\sqrt{2rx}}_{AD}=\frac{19}{4}r$$

$$\boxed{4r-2x+2\sqrt{2rx}=\frac{19}{4}r}$$ equazione risolvente (irrazionale)

$$16r-8x+8\sqrt{2rx}=19r$$

$$8\sqrt{2rx}=3r+8x$$

$$\left(8\sqrt{2rx}\right)^2=(3r+8x)^2$$

$$128rx=9r^2+48rx+64x^2$$

$$64x^2-80rx+9r^2=0$$

$$x_{1,2}=\frac{40r\pm\sqrt{1600r^2-576r^2}}{64}=\frac{40r\pm\sqrt{1024r^2}}{64}=\frac{40r\pm 32r}{64}=\left\langle\begin{array}{l}\dfrac{8r}{64}=\dfrac{1}{8}r\\[2ex]\dfrac{72}{64}r>r\ \text{ non accettabile}\end{array}\right.$$

ACCETTABILITA' GEOMETRICA

La soluzione $x=\frac{72}{64}r=\frac{9}{8}r$ non è geometricamente accettabile, perché maggiore del raggio r.

Quando poniamo un'incognita in un problema, dovremmo sempre pensare ai "confini" (molti scrivono "limiti", con scelta a mio avviso infelice perché questa parola è solitamente usata, in matematica, con un altro significato) **cui è soggetta l'incognita stessa**.

Nel nostro caso, abbiamo posto $x=AH$ e , dato che il punto "mobile" H può, evidentemente, "viaggiare" soltanto fra l'estremo A e il centro O, dovrà essere $\mathbf{0\le x\le r}$.

(Osserviamo per inciso che un'eventuale soluzione $x=0$ o $x=r$ andrebbe valutata con attenzione, per decidere se accettarla o meno, perché corrisponderebbe a una figura "degenere")

ACCETTABILITA' ALGEBRICA

Resta ora ancora aperta la questione legata all'equazione irrazionale.

E' noto che nel caso di un'equazione irrazionale con radicali di indice pari, le soluzioni trovate alla fine potrebbero essere non accettabili.

Sottoponiamo dunque la soluzione "sopravvissuta" $x=r/8$ alla "verifica di accettabilità", sostituendola nell'equazione di partenza per stabilire se effettivamente la soddisfa:

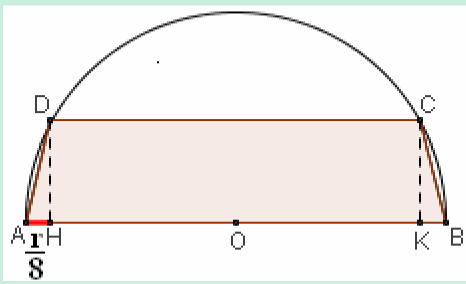
$$4r-2x+2\sqrt{2rx}=\frac{19}{4}r$$

Con $x=\frac{1}{8}r$: $\quad 4r-2\cdot\frac{1}{8}r+2\sqrt{2r\cdot\frac{1}{8}r}=\frac{19}{4}r;\quad 4r-\frac{1}{4}r+2\sqrt{\frac{1}{4}r^2}=\frac{19}{4}r;$

$$4r-\frac{1}{4}r+2\cdot\frac{1}{2}r=\frac{19}{4}r;\quad 4r-\frac{1}{4}r+r=\frac{19}{4}r;\quad \frac{19}{4}r=\frac{19}{4}r\quad \boxed{\text{OK}}$$

♥ **LA "VERA" VERIFICA** (figura qui a destra)

Va detto che, indipendentemente dal fatto che l'equazione risolvente sia o non sia irrazionale, **la verifica più completa e sicura della soluzione trovata per un qualsivoglia problema, geometrico o non, andrebbe fatta** (ed è sempre molto utile e istruttivo) **andando a calcolare, per il valore di *x* trovato, le varie quantità in gioco**, al fine di stabilire se effettivamente la richiesta del problema è soddisfatta. Nel nostro caso, tale verifica "globale" consiste nel disegnare nuovamente la figura, prendendo $AH=r/8$, e nel calcolare le corrispondenti misure dei lati di ABCD, per controllare che il suo perimetro abbia proprio il valore desiderato.



... si trova: base min. $=\frac{7}{4}r$, lato obliquo $=\frac{r}{2}$

e il perimetro è proprio $\frac{19}{4}r$, ***OK !!!***