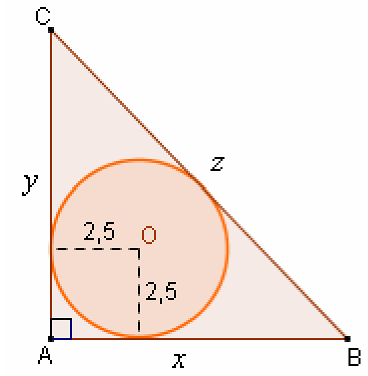
PROBLEMI RISOLUBILI CON UN SISTEMA - ESEMPIO SVOLTO

- Determinare i lati di un triangolo rettangolo sapendo che
  il suo perimetro è 30 cm, e che il raggio del cerchio inscritto misura cm 2,5.



$B\widehat{A}C = 90°$

$2p(ABC) = 30$ cm

$r = 2,5$ cm

$AB = ?\;\; AC = ?\;\; BC = ?$

La risoluzione con più incognite, e quindi col sistema, è consigliata quando non è semplice esprimere tutte le quantità in gioco mediante una sola di esse; specialmente se si prevede che il sistema impostato sarà poi algebricamente facile da risolvere.

Converrà utilizzare 3 incognite: $AB = x$, $AC = y$, $BC = z$

$$\begin{cases} x+y+z=30 \\ x+y=z+2\cdot 2,5 & \textit{In un triangolo rettangolo, la somma dei cateti supera l'ipotenusa di un segmento uguale al diametro del cerchio inscritto} \\ x^2+y^2=z^2 & \text{La terza condizione (qui si hanno 3 incognite: possibilmente, si devono porre 3 condizioni) è in questo caso la } \textit{relazione pitagorica}! \end{cases}$$

$$\begin{matrix} (2) \\ (1) \\ \\ \end{matrix}\begin{cases} x+y=z+5 \\ (z+5)+z=30;\;\; 2z=25;\;\; z=\dfrac{25}{2} \\ x^2+y^2=z^2 \end{cases}$$

Le **equazioni** che formano il sistema devono, in generale, essere **tante quante le incognite**.
In caso contrario il sistema sarà, almeno in generale,
- *impossibile* se si hanno più equazioni che incognite,
- *indeterminato* se si hanno più incognite che equazioni.

Ma nei problemi "scolastici" la norma è, ribadiamolo, che si abbiano tante equazioni quante incognite.

Attenzione, nello scrivere il sistema, a non "riciclare" due volte la stessa informazione: in tal caso, infatti, c'è da aspettarsi che il sistema risulti *indeterminato*.

$$\begin{cases} z=\dfrac{25}{2} \\ x+y=\dfrac{25}{2}+5;\;\; x+y=\dfrac{35}{2} \\ x^2+y^2=\left(\dfrac{25}{2}\right)^2;\;\; x^2+y^2=\dfrac{625}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=\dfrac{25}{2} \\ x+y=\dfrac{35}{2} \\ (x+y)^2-2xy=\dfrac{625}{4};\;\; \left(\dfrac{35}{2}\right)^2-2xy=\dfrac{625}{4};\;\; \dfrac{1225}{4}-2xy=\dfrac{625}{4};\;\; -2xy=-\dfrac{\cancelto{150}{600}}{\cancel{4}};\;\; xy=75 \end{cases}$$

Equazione per determinare due numeri sapendo che la loro somma è $s=\dfrac{35}{2}$ e il loro prodotto è $p=75$:

$$t^2-\frac{35}{2}t+75=0;\quad 2t^2-35t+150=0$$

$$t_{1,2}=\frac{35\pm\sqrt{1225-1200}}{4}=\frac{35\pm\sqrt{25}}{4}=\frac{35\pm 5}{4}=\left\langle \begin{matrix} \dfrac{30}{4}=\dfrac{15}{2} \\ \dfrac{40}{4}=10 \end{matrix}\right.$$

$$\begin{cases} z=25/2 \\ x=15/2 \\ y=10 \end{cases} \vee \begin{cases} z=25/2 \\ x=10 \\ y=15/2 \end{cases}$$

quindi, in definitiva,
i cateti misureranno cm 10 e cm $15/2=7,5$
e l'ipotenusa cm $25/2=12,5$