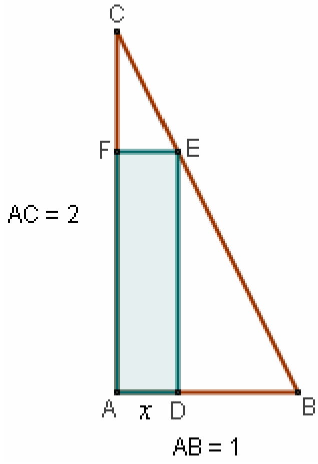
PROBLEMI GEOMETRICI + GRAFICI DI FUNZIONI

ESERCITAZIONE 1 (la correzione completa è a pag. 275)

In un triangolo ABC, rettangolo in A, con AB = 1 cm e AC = 2 cm,
è inscritto un rettangolo ADEF (con D su AB, E su BC, F su AC).

Poniamo AD = x.



a) Come degenera la figura per $x=0$?
Disegna la figura degenere.
Che valore attribuiremo al perimetro di questo rettangolo degenere?

b) Stesse domande per $x=1$.

c) Secondo te, se facciamo variare x da 0 fino a 1
il perimetro di ADEF aumenta oppure diminuisce?

d) In base alle considerazioni svolte al precedente punto c),
sei in grado di stabilire quali sono
il valore minimo e il valore massimo
che il perimetro di ADEF può assumere?

e) Esprimi il perimetro di ADEF in funzione di x. (*Risposta*: $y = 2\text{p}(x) = 4-2x$)

f) Fai un grafico della funzione $y = 2\text{p}(x)$.
L'osservazione del grafico va d'accordo con la risposta data al punto d)?

g) Per quale valore di x il perimetro di ADEF misura cm 3? (*Risposta*: $x = 1/2$)

h) Risolvi graficamente l'equazione $2\text{p}(x) = 3$.

i) Per quale valore di x il rettangolo ADEF è un quadrato?

j) Esprimi in funzione di x la diagonale del rettangolo ADEF (*Risposta*: $y = \text{d}(x) = \sqrt{5x^2-8x+4}$)

k) Per quale valore di x tale diagonale misura 1 cm? (*Risposta*: $x = 1 \vee x = 3/5$)

l) Come potresti stabilire per quale valore di x
la diagonale è minima e per quale è massima?

ESERCITAZIONE 2
(le altre risposte sono a pag. 277)

Riprendiamo la stessa situazione geometrica dell'Esercitazione 1:
triangolo rettangolo ABC con AB = 1 cm e AC = 2 cm, rettangolo inscritto ADEF, AD = x.
Questa volta punteremo la nostra attenzione sull'area anziché sul perimetro.

a) Che valore attribuiremo all'area del rettangolo degenere che si ottiene per $x=0$?

b) Stessa domanda per $x=1$.

c) Se facciamo variare x da 0 fino a 1, l'area di ADEF che variazione subisce?

d) E' possibile stabilire quali sono i valori minimo e massimo che l'area di ADEF può assumere?

e) Esprimi l'area di ADEF in funzione di x. (*Risposta*: $y = \text{S}(x) = 2x(1-x)$)

f) Fai un grafico di $y = \text{S}(x)$: otterrai un arco di parabola.
L'osservazione del grafico conferma la tua risposta al punto d)?

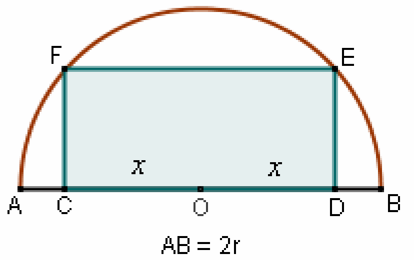
g) Se ti chiedo per quali valori di x l'area vale $\text{cm}^2\ 1/3$,
tu, pensando al problema geometrico, quanti valori ti aspetti?
L'osservazione del grafico conferma la tua risposta?

h) Risolvi algebricamente l'equazione $\text{S}(x) = 1/3$. (*Risposta*: $x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}$)

i) Se ti chiedo per quali valori di x l'area vale $\text{cm}^2\ 2$, quanti valori ti aspetti?

j) Conferma algebricamente la risposta al punto precedente,
risolvendo l'equazione di 2° grado $\text{S}(x) = 2$.

ESERCITAZIONE 3
(le altre risposte sono a pag. 277)



Disegna un rettangolo CDEF inscritto in una semicirconferenza di centro 0 e diametro AB = 2r.

Indica la semibase OC = OD del rettangolo con *x*.

a) Esprimi il perimetro del rettangolo in funzione di x, con due metodi:
- tracciando OF e applicando Pitagora;
- tracciando FA, FB e applicando Euclide

(*Risposta*: $2\mathrm{p}(x) = 4x + 2\sqrt{\mathrm{r}^2 - x^2}$)

b) Per quali valori di x il perimetro del rettangolo misura 4r? (*Risposta* : $x = \mathrm{r},\ x = \frac{3}{5}\mathrm{r}$)

c) Per quali valori di x il perimetro del rettangolo misura 3r? (*Risposta* : $x = \frac{6-\sqrt{11}}{10}\mathrm{r}$)

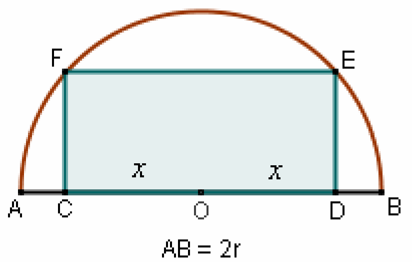
d) Come degenera la figura se $x = 0$
e quanto misura, in questo caso, il perimetro del "rettangolo degenere" ?

e) Come degenera la figura se $x = r$
e quanto misura, in questo caso, il perimetro del "rettangolo degenere" ?

f) Qual è il valore di x per cui si ottiene il rettangolo di perimetro minimo?
Quanto misura tale perimetro minimo?

g) Qual è il valore di x per cui si ottiene il rettangolo di perimetro massimo?
Puoi rispondere a questa domanda tracciando, al computer, il grafico della funzione $y = 2\mathrm{p}(x)$ (poni $\mathrm{r} = 1$).
Quanto misura tale perimetro massimo?

ESERCITAZIONE 4
(le altre risposte sono a pag. 277)



Come nella precedente Esercitazione 3, si considera un rettangolo CDEF inscritto in una semicirconferenza di centro 0 e diametro AB = 2r .

Si indica la semibase OC = OD del rettangolo con *x*.

a) Esprimi l'area del rettangolo in funzione di x. (*Risposta*: $\mathrm{S}(x) = 2x\sqrt{\mathrm{r}^2 - x^2}$)

b) Per quali valori di x l'area del rettangolo misura r^2 ? (*Risposta*: $x = \frac{\mathrm{r}\sqrt{2}}{2}$)

c) Per quali valori di x l'area del rettangolo misura $\frac{24}{25}\mathrm{r}^2$? (*Risposta*: $x = \frac{3}{5}\mathrm{r} \vee x = \frac{4}{5}\mathrm{r}$)

d) Come degenera la figura se $x = 0$? Quanto misura l'area del "rettangolo degenere" ?

e) Come degenera la figura se $x = \mathrm{r}$? Quanto misura l'area del "rettangolo degenere" ?

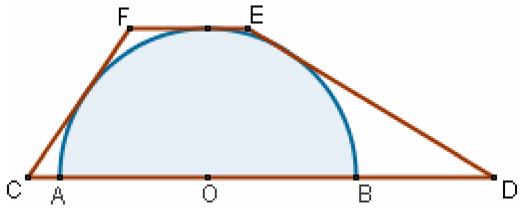
f) Qual è il valore di x per cui si ottiene il rettangolo di area minima?
Quanto misura tale area minima?

g) Qual è il valore di x per cui si ottiene il rettangolo di area massima?
Puoi rispondere a questa domanda tracciando, al computer, il grafico della funzione $y = \mathrm{S}(x)$ (poni $\mathrm{r} = 1$).
Quanto misura tale area massima?

ESERCITAZIONE 5
(le altre risposte sono a pag. 277)

Un trapezio si dice "circoscritto ad una semicirconferenza" se:

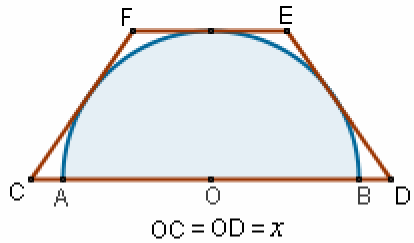
- la sua base maggiore sta sulla retta del diametro;
- lati obliqui e base minore sono tangenti alla semicirconferenza (vedi figura).



a) Dimostra il
TEOREMA: ***in un trapezio circoscritto ad una semicirconferenza, la base maggiore è uguale alla somma dei due lati obliqui.***
(Indicazione: congiungi il centro con gli estremi della base minore e dimostra che due certi triangoli così ottenuti sono isosceli).

b) A partire dal teorema precedente, giustifica il
COROLLARIO: ***in un trapezio ISOSCELE circoscritto ad una semicirconferenza, il lato obliquo è metà della base maggiore.***

Considera ora un trapezio ISOSCELE CDEF, di base maggiore CD, circoscritto ad una semicirconferenza di diametro noto $AB = 2r$.



c) Esprimi il perimetro 2p di CDEF in funzione della lunghezza x della semibase maggiore OD.
Risposta: $2p = 6x - 2\sqrt{x^2 - r^2}$

d) Determina la lunghezza x della semibase maggiore in modo che il perimetro del trapezio misuri $6r$.
Risposta: $x = \frac{5}{4}r \vee x = r$ (soluzione degenere)

e) Esiste, fra tutti gli infiniti trapezi isosceli circoscrivibili ad una semicirconferenza di raggio r, un trapezio di perimetro massimo?

f) … e un trapezio di perimetro minimo?

g) Posto $y = f(x)$ = perimetro del trapezio di semibase magg. x, circoscritto ad una semicirconf. di raggio r, traccia al computer il grafico della funzione $y = f(x)$ (supponendo $r = 1$).
L'osservazione del grafico ti consentirà di verificare se le tue risposte ai quesiti e, f sono corrette.

ESERCITAZIONE 6
(le altre risposte sono a pag. 277)

a) **Considera, come nell'Esercitazione 5, un trapezio isoscele CDEF circoscritto ad una semicirconferenza di diametro noto $AB = 2r$, ed esprimine l'area S in funzione della lunghezza x della semibase maggiore.**
Risposta: $S = r\left(2x - \sqrt{x^2 - r^2}\right)$

b) Determina x in modo che l'area del trapezio misuri $\frac{7}{4}r^2$ (*Risposta:* $x = \frac{13}{12}r \vee x = \frac{5}{4}r$)

c) Esiste, fra tutti gli infiniti trapezi isosceli circoscrivibili ad una semicirconferenza di raggio r, un trapezio di area massima?

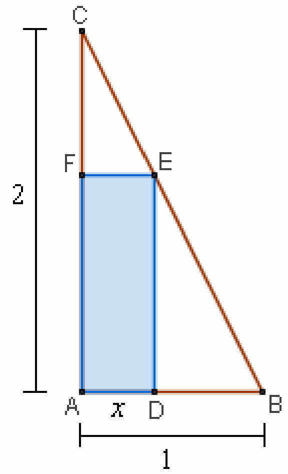
d) ... e un trapezio di area minima?

e) Posto $y = g(x)$ = area del trapezio di semibase maggiore x, circoscritto ad una semicirconf. di raggio r, traccia al computer il grafico della funzione $y = g(x)$ (supponendo $r = 1$).
Verifica la correttezza delle risposte date ai precedenti punti c, d.
Il trapezio di area minima è lo stesso trapezio che (esercitazione precedente) aveva perimetro minimo?

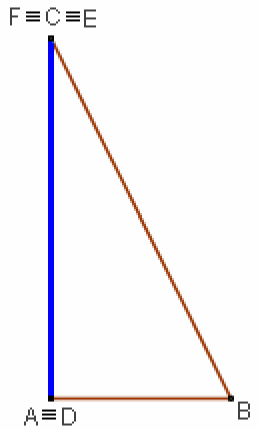
Svolgimento
ESERCITAZIONE 1

In un triangolo ABC, rettangolo in A, con $AB = 1$ cm e $AC = 2$ cm, è inscritto un rettangolo ADEF (con D su AB, E su BC, F su AC).

Poniamo $AD = x$.



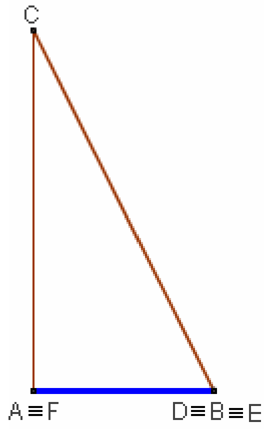
a) Come degenera la figura per $x = 0$? Disegna la figura degenere. Che valore attribuiremo al perimetro di questo rettangolo degenere?



Per $x = 0$
il rettangolo si riduce
ad una coppia di
segmenti sovrapposti.

In questo caso "degenere",
in cui $AD = FE = 0$
e $AF = DE = 2$,
il perimetro
del rettangolo vale
$2p(ADEF) = 0+0+2+2 =$
$= \mathbf{4\ cm}$

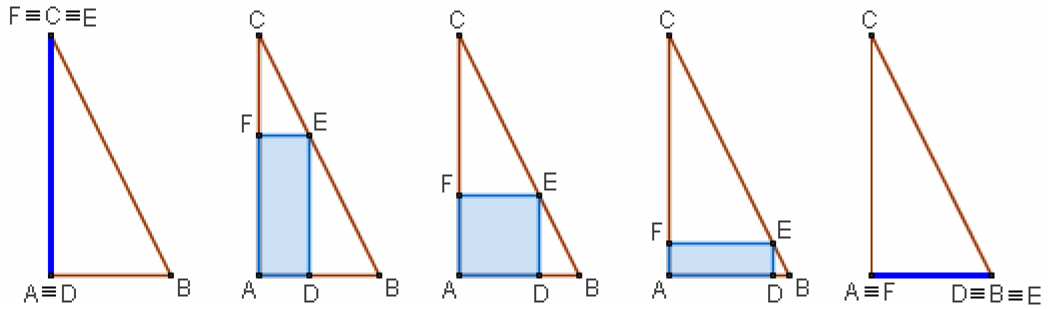
b) Stesse domande per $x = 1$.



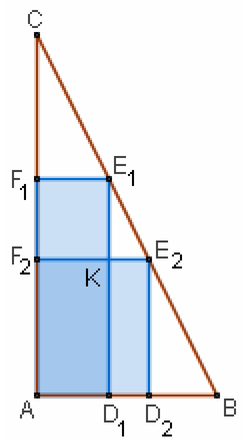
Anche per $x = 1$
il rettangolo si riduce
ad una coppia di
segmenti sovrapposti.

In questo caso "degenere",
in cui $AD = FE = 1$
e $AF = DE = 0$,
il perimetro
del rettangolo vale
$2p(ADEF) = 1+1+0+0 =$
$= \mathbf{2\ cm}$

c) Se facciamo variare x da 0 fino a 1, il perimetro di ADEF aumenta oppure diminuisce?



Sembra diminuire sempre …
Ce ne convinciamo con sicurezza
se osserviamo che
ad ogni nuovo "fotogramma"
della sequenza,
le due altezze diminuiscono
PIU' di quanto nel frattempo
le due basi aumentino.



$KE_1 > KE_2$

Ma nel passaggio
da $AD_1E_1F_1$ a $AD_2E_2F_2$,

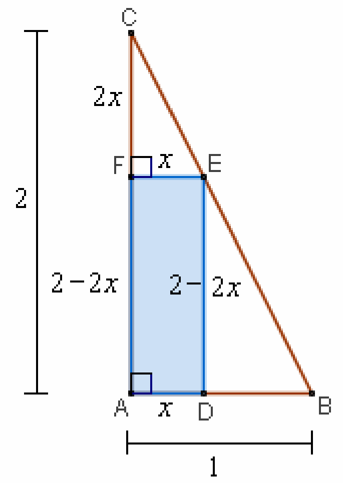
KE_1 rappresenta la diminuzione
di ciascuna delle due altezze

KE_2 rappresenta l'aumento
di ciascuna delle due basi

d) In base alle considerazioni svolte al precedente punto c), sei in grado di stabilire quali sono il valore minimo e il valore massimo che il perimetro di ADEF può assumere?

Se il perimetro del rettangolo diminuisce sempre, al variare di x da 0 a 1, allora
Il valore massimo del perimetro si ha con $x = 0$ $(2p = 4\text{ cm})$ e il valore minimo con $x = 1$ $(2p = 2\text{ cm})$

e) Esprimi il perimetro di ADEF in funzione di *x*.



$FEC \sim ABC$ (rettangoli, $\hat{C}$ in comune)

quindi, così come $AC = 2AB$,
sarà anche $FC = 2FE = 2x$.

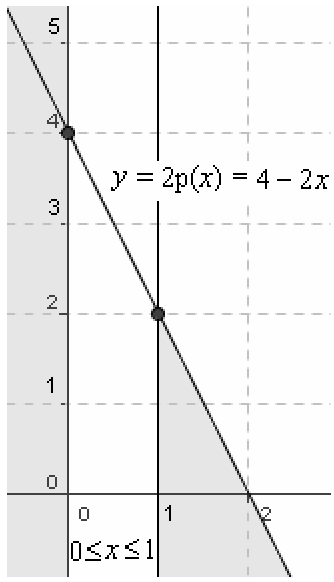
Perciò

$AF = DE = 2 - 2x$

$\boxed{2p(ADEF)} = 2AD + 2AF =$

$= 2x + 2(2 - 2x) = 2x + 4 - 4x = \boxed{4 - 2x}$

f) Fai un grafico della funzione $y = 2p(x)$. L'osservazione del grafico va d'accordo con la risposta data al punto d)?



Tracciamo il grafico della funzione $y = 4 - 2x$
la quale, limitatamente all'intervallo $0 \le x \le 1$,
esprime il perimetro del rettangolo ADEF.

Si tratta di una funzione "lineare" (= di 1° grado) $y = mx + q$,
con coefficiente angolare $m = -2$ e ordinata all'origine $q = 4$.

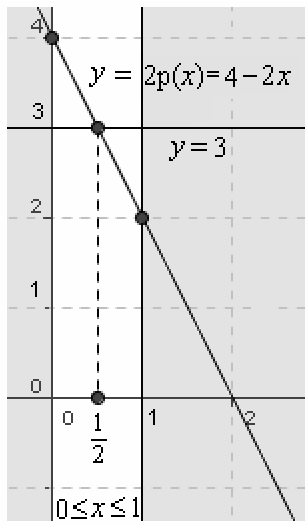
Il grafico è coerente con le nostre precedenti risposte:
al variare di x da 0 a 1, la y corrispondente
(che fornisce il valore del perimetro)
diminuisce sempre,
passando dal valore massimo $y = 4$ (con $x = 0$)
al valore minimo $y = 2$ (con $x = 1$).

g) Per quale valore di *x* il perimetro di ADEF misura cm 3?

Basta porre $4 - 2x = 3$ e risolvere l'equazione:

$$-2x = -1; \quad x = \frac{1}{2}$$

h) Risolvi graficamente l'equazione 2p(*x*)=3



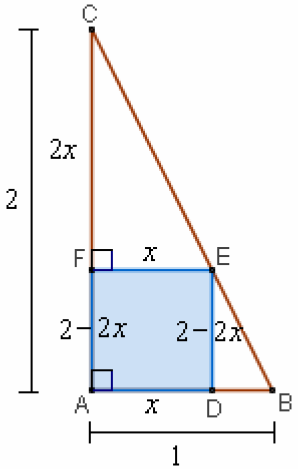
$\underbrace{4 - 2x}_{1°\text{ m.}} = \underbrace{3}_{2°\text{ m.}}$

Il 2° membro è la funzione costante $y = 3$,
il cui grafico è una retta parallela all'asse x.

i) Per quale valore di x il rettangolo ADEF è un quadrato?

Possiamo impostare l'equazione $\boxed{\overbrace{2-2x}^{AF}=\overbrace{x}^{FE}}$;

otteniamo $-3x=-2$, $\boxed{x=\frac{2}{3}}$



In alternativa, si poteva porre $\boxed{\overbrace{4-2x=4x}^{2p}}$,

da cui $-6x=-4$, $\boxed{x=\frac{2}{3}}$

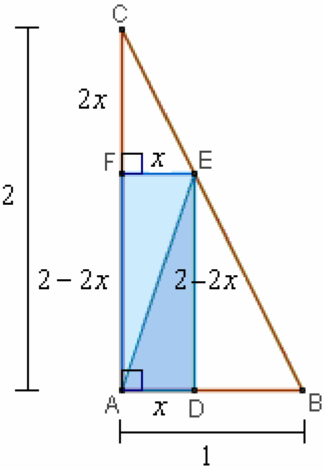
j) Esprimi in funzione di x la diagonale del rettangolo ADEF

$$\boxed{AE=}\sqrt{AD^2+DE^2}=\sqrt{x^2+(2-2x)^2}=$$
$$=\sqrt{x^2+4-8x+4x^2}=\boxed{\sqrt{5x^2-8x+4}}$$

k) Per quale valore di x tale diagonale misura 1 cm?

$\boxed{\sqrt{5x^2-8x+4}=1}$ $\quad 5x^2-8x+4=1; \quad 5x^2-8x+3=0$

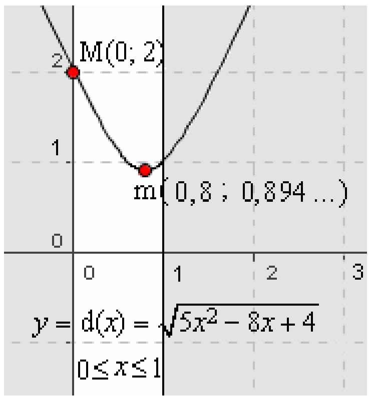
$\boxed{x=1 \vee x=3/5}$ (entrambe accettabili; la 1ª è "sol. degenere")



l) Come potresti stabilire per quale valore di x la diagonale è minima e per quale è massima?

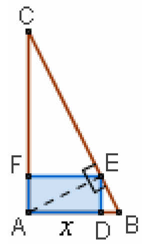
Si può tracciare al computer (vedi figura qui a destra) il grafico della funzione $y=\mathrm{d}(x)=\sqrt{5x^2-8x+4}$, che esprime la diagonale, e osservare questo grafico, oppure, se il software lo consente, servirsi del comando per la ricerca degli "estremi" (massimi o minimi).

D'altronde, si capisce che il radicale $\sqrt{5x^2-8x+4}$ assume il suo valore minimo quando è minimo il suo radicando $5x^2-8x+4$. E qual è l'ascissa del vertice della parabola $y=5x^2-8x+4$? …



Si può procedere anche *per pura via geometrica*.

♪ Si capisce che la diagonale è minima nella situazione in cui il punto E (che sta su BC) ha la minima distanza dal punto A, ossia quando la diagonale AE coincide con l'altezza relativa all'ipotenusa! Se calcoli tale altezza vedrai che vale $2/\sqrt{5}\approx 0{,}894$ e che il valore corrispondente di x è $4/5=0{,}8$, in pieno accordo col grafico.



♫ Allo stesso modo, è evidente che il punto del segmento BC con la massima distanza da A è l'estremo C, per il quale la distanza da A (= diag. del rettangolo "degenere") vale 2, e che corrisponde al valore $x=0$.

RISPOSTE AI QUESITI DELLE ESERCITAZIONI DA 2 A 6

2) a) $S=0$ b) $S=0$ c) a partire dal valore 0 aumenta, tocca un massimo, poi diminuisce tornando a 0
d) $m=\text{minimo}=0$; per il massimo M non è così facile, lo sarà dopo aver fatto il grafico di cui al punto f): si vedrà che $M=1/2$ (ordinata del vertice della parabola) g) 2 valori i) nessuno j) impossibile

3) d) $2p=2r$ e) $2p=4r$ f) $x=0$, $2p_{min}=2r$ g) $x=0{,}9r$ circa, $2p_{MAX}=4{,}5r$ circa

4) d) $S=0$ e) $S=0$ f) area minima $S=0$ per $x=0$ oppure $x=r$ g) $x=0{,}7r$ circa, $S_{MAX}=r^2$

5) e) no, dando a x valori molto alti il perimetro assume valori alti a piacere
f) sì, è quello che si ottiene per $x\approx 1{,}06r$, e il suo perimetro è $\approx 5{,}66r$

6) c) no d) sì e) no, non è lo stesso. L'area minima si ha per $x\approx 1{,}15r$ ed è $\approx 1{,}73r^2$