

TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE PIANE

1. COSA SI INTENDE PER “TRASFORMAZIONE PIANA”

Si dice “**trasformazione geometrica piana**”, o brevemente “**trasformazione piana**”, una **corrispondenza biunivoca del piano con sé stesso**, ossia una corrispondenza nella quale

- ♪ ad ogni punto del piano corrisponde uno e un solo altro punto del piano
- ♪ e, viceversa, ogni punto è il corrispondente di uno e un solo altro punto.

□ Esempio 1

Definiremo ora una corrispondenza fra punti del piano, che verrà chiamata “**omotetia**” (nel seguito ometteremo l’accento).

Un’omotetia è caratterizzata da un “**centro di omotetia**” e da un “**rapporto di omotetia**”.

Vediamo di cosa si tratta, considerando, per meglio fissare le idee, un caso particolare: supporremo che il rapporto di omotetia, che indicheremo con k , sia uguale a 3.

Sia O un punto fissato del piano.

L’omotetia di centro O e rapporto $k=3$

fa corrispondere (vedi figura)

ad ogni punto P del piano

quel punto P' del piano, tale che:

- I. P' sta sulla semiretta OP ;
- II. $OP' = 3OP$



E’ evidente che

in questo modo risulta definita una “corrispondenza biunivoca del piano con sé stesso”:

infatti

- ♪ ad ogni punto del piano resta associato uno ed un solo altro punto;
- ♪ e viceversa, ogni punto del piano potrà essere “visto” come il corrispondente di uno ed un sol punto.

Quindi siamo in presenza di una “trasformazione geometrica piana”.

Diremo che

P' è “il corrispondente” di P , o anche “l’immagine” di P , attraverso la trasformazione considerata

e, se indichiamo tale trasformazione con t , potremo scrivere

$$P' = t(P) \quad (\text{leggi: “ } P' \text{ è uguale a } t \text{ di } P \text{ ”)}$$

oppure

$$P \xrightarrow{t} P' \quad (\text{leggi: “ } t \text{ fa passare da } P \text{ a } P' \text{ ”, oppure: “ } P' \text{ è l’immagine di } P \text{ attraverso la } t \text{ ”)}$$

Il punto P , a sua volta, verrà detto “la controimmagine” di P' .

Quando si vuole affermare che t fa corrispondere al punto P , il punto P' ,

si adoperava spesso una locuzione suggestiva:

si dice che t “**muta**” P in P' , oppure “**trasforma**” P in P' .

Dal punto di vista psicologico, ciò equivale a:

- a) partire dal punto P
- b) applicare la funzione t
- c) e poi andare a considerare l’immagine P' “dimenticandosi” del punto P iniziale.

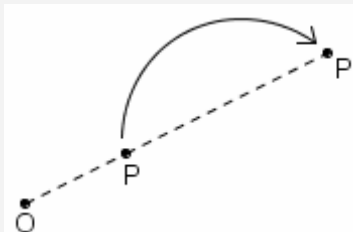
Nella nostra mente, ora, non c’è più P , c’è invece P' :

P “è diventato” P' , “si è trasformato in” P' ...

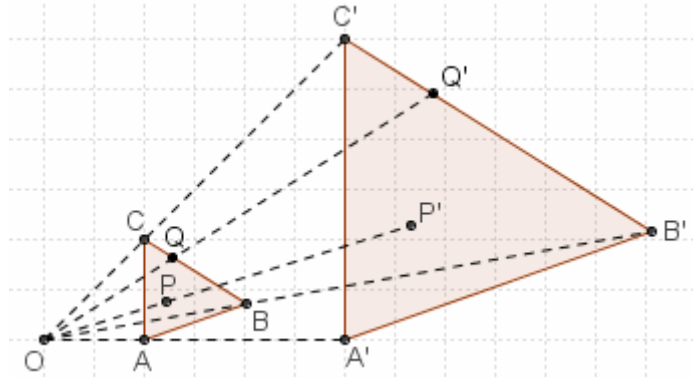
La questione, però, è *soltanto psicologica*.

In realtà, il punto P è rimasto al suo posto,

e abbiamo semplicemente stabilito di *farli corrispondere* P' , come se una freccia partisse da P e avesse la sua punta in P' .



Prendiamo ora un triangolo ABC, disegniamo innanzitutto le immagini A', B', C' dei suoi tre vertici attraverso la solita omotetia di centro O e rapporto 3, e costruiamo la figura costituita da tutti i punti che corrispondono ai punti *del lato BC* (brevemente: la figura costituita da tutte le immagini dei punti di BC).



Si constata, e si potrebbe dimostrare in modo rigoroso, che le immagini dei punti del segmento BC costituiscono, nel loro insieme, ancora un segmento, e precisamente il segmento B'C', ossia quello avente per estremi il punto B' (che è l'immagine di B) e il punto C' (che è l'immagine di C).

Si dice, brevemente, che “l'immagine del segmento BC è il segmento B'C'”, e si può scrivere $t(BC) = B'C'$.

Analogamente, l'immagine del segmento AB non è altro che il segmento A'B', e l'immagine del segmento AC coincide col segmento A'C'. Insomma, la nostra omotetia “**trasforma segmenti in segmenti**”!

Prendendo poi un punto P che sia interno al triangolo ABC, la sua immagine P' starà internamente al triangolo A'B'C', e complessivamente l'insieme dei punti interni ad ABC risulta avere come immagine l'insieme dei punti interni ad A'B'C'.

In definitiva, si vede che questa corrispondenza “**trasforma**” il triangolo ABC nel triangolo A'B'C'.

Si potrebbe provare che il “nuovo” triangolo è *simile* al “vecchio”, con perimetro triplo e area che è 9 volte l'area del triangolo iniziale.

Per significare che

“l'insieme delle immagini dei punti del triangolo ABC, costituisce il triangolo A'B'C'” si può scrivere

$$t(ABC) = A'B'C'$$

e dire, appunto, che la t «trasforma il triangolo ABC nel triangolo A'B'C'».

Cliccando su questa freccia \Rightarrow ,

potrai vedere una bella figura dinamica GEOGEBRA

(*grazie al creatore di questo fantastico freeware, l'austriaco Marcus Hohenwarter!*)

che mostra all'opera un'omotetia il cui centro e il cui rapporto possono essere fissati dall'utente.

E' possibile pure scegliere di far sì che il rapporto di omotetia k sia < 0 .

Delle omotetie con rapporto negativo, comunque, ci occuperemo più avanti.

□ Esempio 2

Un altro bell'esempio di trasformazione piana è la “**simmetria assiale**”.

Sia a una retta fissata su di un piano.

Si dice “simmetria assiale di asse a”

quella corrispondenza (vedi figura)

che ad ogni punto P del piano

fa corrispondere

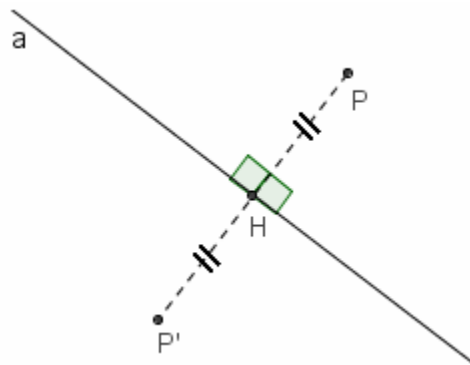
quell'altro punto P'

ottenuto tracciando da P

la perpendicolare PH alla retta a,

e prolungando il segmento PH

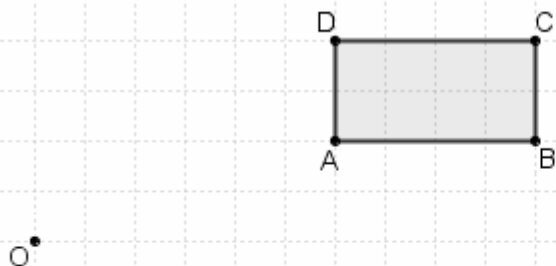
di un segmento $HP' = PH$.



Cliccando su questa freccia \Rightarrow , ecco una figura GEOGEBRA per vedere all'opera una simmetria assiale. In particolare, trascinando col mouse il punto Q della figura, che è vincolato a restare sul contorno di ABC, constaterai come anche in questo caso la trasformazione “**muti segmenti in segmenti**”.

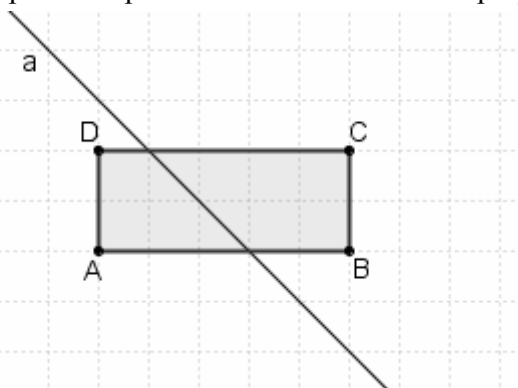
ESERCIZI

- 1) Considera l'omotetia avente per centro il punto O della figura sottostante, e rapporto $k = 1/2$.
- Determina le immagini A' , B' , C' , D' dei vertici del rettangolo ABCD.
 - Qual è l'immagine di O nella trasformazione?
 - Determina le *controimmagini* A^* , B^* , C^* , D^* dei vertici di ABCD.



Vai a vedere la soluzione [⇨](#)

- 2) Nella figura sotto riportata trovi un rettangolo ABCD e una retta a.
- Disegna le immagini A' , B' , C' , D' , e le controimmagini A^* , B^* , C^* , D^* , dei vertici di ABCD, nella simmetria assiale di asse a.
 - Quali sono, qui, i punti del piano che coincidono con la propria immagine (punti "uniti")?



Vai a vedere la soluzione [⇨](#)

Semplici trasformazioni geometriche con GEOGEBRA

Fermo restando che innanzitutto devi saper svolgere gli esercizi su *carta*, con matita, righello e squadra, il freeware GeoGebra permette, fra le tantissime cose, anche di sottoporre una figura a qualche trasformazione geometrica fondamentale.

L'icona che serve a questo scopo è facilmente riconoscibile, e il messaggio di HELP che si può far comparire con la pressione di F1 sulla tastiera ti spiega come fare.

