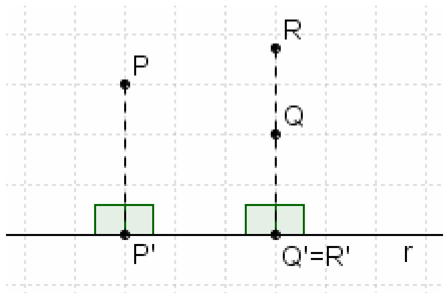
2. UN CONTROESEMPIO

Controesempio: una corrispondenza fra punti del piano, che non sia una "trasformazione".

Se consideriamo su di un piano una retta r fissata
e facciamo corrispondere ad ogni punto P del piano
la sua proiezione P' su r,
questa corrispondenza NON avrà il diritto di essere chiamata
"*trasformazione* piana", per il fatto che NON E' BIUNIVOCA !
Se è infatti vero che ad ogni punto del piano corrisponde
uno ed un solo altro punto, non vale invece il viceversa:
infatti, preso un punto del piano, esso avrà:

- *infinite* controimmagini, qualora appartenga alla retta r;
- *nessuna* controimmagine, se non appartiene ad r.



3. L'IMMAGINE DI UN SEGMENTO ATTRAVERSO UNA TRASFORMAZIONE PIANA

Un dubbio.
Ma … in una trasformazione piana, l'immagine di un segmento è *sempre* ancora un segmento?

Negli esempi precedenti (una omotetia di rapporto 3; una simmetria assiale)
abbiamo visto (empiricamente, senza ancora una dimostrazione rigorosa)
che l'immagine di un segmento risultava essere ancora un segmento.

In effetti, **le trasformazioni più "comuni" sono quelle che mutano segmenti in segmenti.**

Esistono però anche delle trasformazioni che NON si comportano in questo modo.
Per fare un esempio, consideriamo un piano nel quale sia stato fissato un riferimento cartesiano.
Possiamo pensare alla corrispondenza $P \to P'$ definita (utilizzando le coordinate) nel modo seguente:

$$P(x,y) \xrightarrow{t} P'(x',y'),\ \ con\ \begin{cases} x' = x \\ y' = \dfrac{y^3}{10} \end{cases}$$

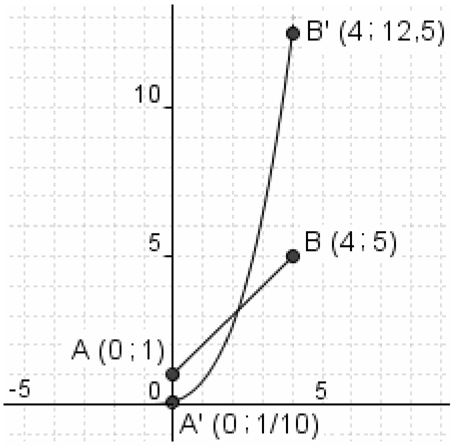
La corrispondenza è biunivoca, in quanto:

- non solo ad ogni punto (x,y) corrisponde uno ed un solo altro punto (x',y')
- ma è anche vero che ogni punto del piano risulta essere il corrispondente di uno ed un solo altro punto, come si può verificare invertendo le equazioni della trasformazione:

$$\begin{cases} x = x' \\ y = \sqrt[3]{10y'} \end{cases}$$

Di qui si vede che per ogni punto del piano, esiste ed è unica la rispettiva controimmagine.

Se ora consideriamo ad esempio il segmento di estremi A(0,1) e B(4,5) e andiamo a disegnare le immagini dei suoi punti, ci rendiamo conto che tali immagini non costituiscono un segmento, bensì un arco di curva!



N O T A

Osserviamo, per inciso, che se avessimo preso invece la corrispondenza definita dalle equazioni $\begin{cases} x' = x \\ y' = y^2 \end{cases}$
questa NON avrebbe individuato una "trasformazione geometrica", perché non sarebbe stata biunivoca.
Infatti, provando ad invertire, si sarebbe ottenuto

$$\begin{cases} x = x' \\ y = \pm\sqrt{y'} \end{cases}$$

Ora, la radice *quadrata* preceduta dal *doppio segno* ci dice che:
i punti con ordinata negativa non hanno controimmagine;
quelli con ordinata positiva ce l'hanno ma non è unica.