4. TRASFORMAZIONI PIANE MOLTO SPECIALI: LE AFFINITA' E, IN PARTICOLARE, LE ISOMETRIE

Si dicono AFFINITA' quelle trasformazioni che
MUTANO RETTE IN RETTE, CONSERVANDO L'ORDINE DEI PUNTI ALLINEATI
(= se A, B, C sono allineati, con B compreso fra A e C,
dette A', B', C' le rispettive immagini,
anche A', B', C' sono certamente allineati, con B' compreso fra A' e C').

Dalla definizione si trae immediatamente che
un'affinità muta sempre
una semiretta in un'altra semiretta,
e un segmento in un altro segmento.

Altra conseguenza della definizione è che
l'immagine, attraverso un'affinità, di un triangolo (compresi i punti interni di questo)
è sempre ancora un triangolo;
questo enunciato, vero per tutte le affinità, è un po' noioso da provare e noi ne presenteremo la dimostrazione nel successivo paragrafo 5, riferendoci al caso particolare delle "isometrie" (tuttavia, si può verificare che gli stessi ragionamenti lì utilizzati funzionerebbero perfettamente anche se estesi ad una affinità qualsiasi).

L'omotetia e la simmetria assiale sono due esempi di affinità
(noi per ora l'abbiamo constatato empiricamente; il "Teorema fondamentale sulle isometrie" qui sotto riportato, insieme con lo specchietto del successivo paragrafo 6, consente di dimostrarlo per la simmetria assiale, mentre per l'omotetia la dimostrazione è una conseguenza del contenuto dei successivi paragrafi 15 e 16).

Si dicono ISOMETRIE quelle trasformazioni che "CONSERVANO LE DISTANZE":
cioè, una trasformazione *t* è un'isometria se e solo se,
per ogni coppia di punti A, B,
indicate con A', B' le rispettive immagini, si ha sempre

$$A'B' = AB\,.$$

La simmetria assiale è un'isometria (immediato da constatare, dimostrazione nel successivo par. 6),
l'omotetia non lo è.

TEOREMA FONDAMENTALE SULLE ISOMETRIE

OGNI ISOMETRIA E' ANCHE UN'AFFINITA', ossia:
se una trasformazione piana è un'isometria (= "conserva le distanze"),
allora certamente quella trasformazione piana muta rette in rette,
conservando l'ordine dei punti allineati
(e, di conseguenza, muta semirette in semirette e segmenti in segmenti).

Dimostrazione

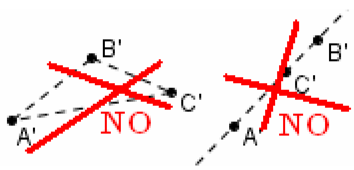
Prendiamo tre punti A, B, C ALLINEATI
(= giacenti su di una stessa retta), con B compreso fra A e C.

Se t è un'isometria, posto $A' = t(A)$, $B' = t(B)$, $C' = t(C)$,
risulterà **A'B' = AB, A'C' = AC, B'C' = BC** .

Essendo allora **AB + BC = AC** , sarà anche $\boxed{A'B' + B'C' = A'C'}$.

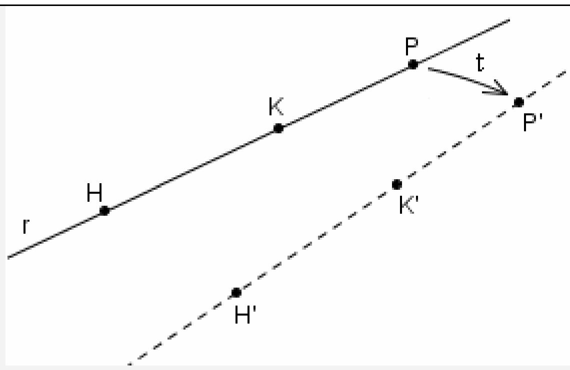
Ma **quest'ultima relazione può sussistere soltanto se i tre punti A', B', C' sono a loro volta fra loro allineati, con B' compreso fra A' e C'** .
Infatti

- se i tre punti *non* fossero allineati varrebbe invece la "disuguaglianza triangolare" A'B' + B'C' > A'C'
- mentre se A', B' e C' fossero allineati, ma con B' *non* compreso fra A' e C', varrebbe un'altra uguaglianza, ma non quella in questione.



Così la tesi è sostanzialmente dimostrata.
Infatti abbiamo fatto vedere che un'isometria muta sempre
una terna di punti allineati in un'altra terna di punti allineati, conservando l'ordine dei punti in gioco;
ma ora, data una retta r, qualche considerazione supplementare
(che esporremo qui di seguito, nel riquadro) consentirà di provare che la sua immagine è ancora una retta.

Infatti, fissati a piacere su r due punti H e K ,
consideriamo le rispettive immagini H', K':
un qualsivoglia punto P della retta r
verrà certamente trasformato,
in virtù di quanto già dimostrato,
in un punto allineato con H' e K',
quindi in un punto facente parte della retta H'K'.

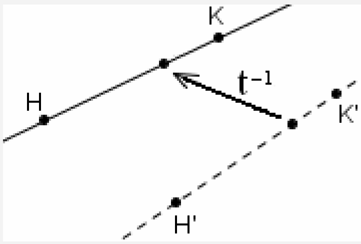


Con ciò abbiamo provato che
le immagini dei punti di r =HK,
stanno tutte sulla retta H'K'.

Si potrebbe a questo punto ritenere la dimostrazione conclusa…
… invece, se ci pensi bene, non è così!
In effetti, resta ancora da dimostrare
che la retta H'K' è completamente "riempita" dalle immagini dei punti di r,
ossia che OGNI punto di tale retta è l'immagine di un punto di r.
Coraggio dunque!

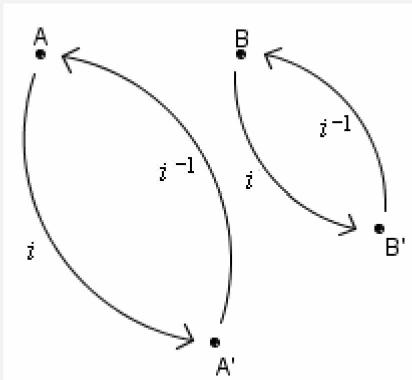
Al nostro scopo, formuliamo innanzitutto un'ovvia osservazione preliminare:
la corrispondenza inversa di un'isometria è ancora un'isometria (NOTA).

Ma allora, ritorniamo alla nostra coppia di rette r = HK, H'K'.
Fin qui, abbiamo dimostrato che l'immagine di ciascun punto della retta HK, sta sulla H'K':
e ciò prova che l'insieme delle immagini dei punti di HK è un SOTTOINSIEME della H'K'.
Se adesso pensiamo all'isometria inversa della *t*, allo stesso modo
l'insieme delle immagini dei punti della retta H'K' attraverso tale trasformazione inversa t^{-1}
andrà a costituire un sottoinsieme della retta HK.
Dunque, preso un *qualsivoglia* punto della H'K',
la sua immagine attraverso l'isometria inversa della *t*
sarà un certo punto, *appartenente alla HK*;
ciò significa che la controimmagine, rispetto alla *t*,
di quel punto arbitrario di H'K', *sta su HK*:
ma allora *OGNI punto della H'K'*
è immagine, attraverso la t, di un punto della HK.



E con ciò, la dimostrazione del Teorema Fondamentale è finalmente completata.

NOTA
Detta i una qualsivoglia isometria, consideriamo
la corrispondenza inversa, che indicheremo con i^{-1}.
La i^{-1}, ossia la corrispondenza che, rispetto alla i, fa "tornare indietro"
(= fa corrispondere ad un punto del piano,
quello che ne era la CONTROimmagine attraverso la i)
è anch'essa, come la i, una corrispondenza biunivoca
(anziché dalle asole ai bottoni, fa passare dai bottoni alle asole!)
e conserva le distanze: infatti, detti A', B' due generici punti del piano,
e dette A, B le loro immagini attraverso la i^{-1} (ossia, le loro
controimmagini attraverso la i) avremo AB = A'B', per il fatto che
A' e B' sono le immagini di A e B attraverso la i, che è un'isometria.



UNA PUNTUALIZZAZIONE IMPORTANTE

Quando abbiamo dato la definizione di isometria, che ti invito a rileggere,
abbiamo scritto che in un'isometria, per qualsiasi coppia di punti A, B, si ha sempre A'B' = AB.

Vorrei ora sottolineare un fatto:
con ciò, NON stavamo affatto dando per scontato che il segmento A'B' fosse l'immagine del segmento AB.

Voglio dire: A' era l'immagine di A, e B' era l'immagine di B, ma non era assolutamente sottinteso
che i punti interni al segmento AB avessero come immagini i punti interni del segmento A'B'.

Ma ora, **dopo aver dimostrato il Teorema Fondamentale, resta definitivamente stabilito che in una isometria un segmento viene sempre trasformato in un segmento.** Precisamente, in un segmento **uguale (= congruente, cioè sovrapponibile tramite un movimento rigido) a quello di partenza; e avente per estremi gli estremi del segmento di partenza.**