7. ALTRE ISOMETRIE. RELAZIONE FRA ISOMETRIE E MOVIMENTI RIGIDI

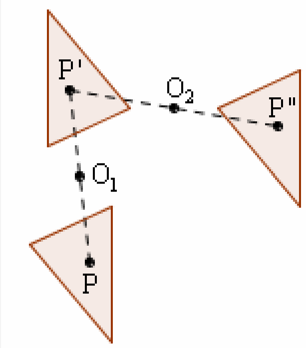
a)
Prima di tutto, **si ottiene sempre un'isometria quando si "compongono"**
(= si applicano successivamente) due qualsivoglia isometrie.

Infatti è immediato dimostrare che
la composizione di due isometrie è ancora un'isometria.

Dimostrazione
Presi due punti A, B, e indicate:
- con A', B' le loro immagini attraverso la prima delle due isometrie da applicare successivamente
- con A'', B'' le immagini di A', B' attraverso la seconda isometria

avremo $A'B' = AB$ e poi $A''B'' = A'B'$, da cui $A''B'' = AB$.

Ad esempio, consideriamo due punti fissi O_1 e O_2,
e applichiamo al generico punto P del piano
♪ innanzitutto la simmetria di centro O_1,
ottenendo un certo punto P';
♫ poi, a questo P', applichiamo la simmetria di centro O_2,
pervenendo ad un nuovo punto P''.
Possiamo ora pensare alla trasformazione
che muta *direttamente* P in P'':
bene, questa, essendo la composizione di due isometrie,
sarà ancora un'isometria.



In figura è anche rappresentato un triangolo con la sua immagine attraverso la prima simmetria, poi l'immagine di questa immagine attraverso la seconda simmetria

b)
Se si pensa di "far scivolare il piano su sé stesso",
o di "ribaltare il piano intorno ad una sua retta, che rimanga ferma nel ribaltamento",
o di effettuare varie composizioni, ossia applicazioni successive, di tali movimenti rigidi,
si individua in tal modo un'isometria.
Possiamo visualizzare bene questo fatto utilizzando la lavagna come piano fisso,
e un foglio di plastica trasparente come piano mobile sovrapposto al precedente.
Facciamo un disegno sulla lavagna, appoggiamoci sopra il foglio trasparente e su questo ricalchiamo il disegno.
Poi, sempre tenendo il foglio trasparente a ridosso della lavagna,
lo spostiamo lateralmente o verticalmente, magari anche ruotandolo.
Ora sul piano della lavagna si vedono due figure, quella originaria sull'ardesia e quella ricalcata a penna
sul foglio; ai "vecchi" punti della figura originaria corrispondono i nuovi punti della figura sul foglio.

Viceversa, il teorema che citeremo fra poco
("una qualsiasi isometria si può scomporre nell'applicazione successiva di al più 3 simmetrie assiali"),
insieme con l'ovvia osservazione che una simmetria assiale può essere evidentemente associata
ad un movimento rigido di "ribaltamento del piano attorno a una sua retta", mostra che
ogni isometria, comunque sia stata definita, è SEMPRE interpretabile come generata
da un movimento rigido che "sposti il piano per poi risovrapporlo a sé stesso". Quindi
LE ISOMETRIE SONO INTIMAMENTE CORRELATE o correlabili CON I MOVIMENTI RIGIDI.

E un'isometria viene detta "DIRETTA" o "INVERSA" a seconda che
il movimento rigido dal quale si può pensare generata
- **comporti soltanto uno "strisciamento" del piano su sé stesso (isometrie dirette)**
- **oppure richieda anche un ribaltamento del piano intorno ad una sua retta (isometrie inverse).**

❑ LA SIMMETRIA ASSIALE E' UN PO' "LA REGINA" DELLE ISOMETRIE

Un teorema estremamente interessante (ne omettiamo la dimostrazione) afferma che **QUALSIASI ISOMETRIA si può sempre scomporre nel prodotto (=applicazione successiva) di AL PIU' 3 SIMMETRIE ASSIALI.**
Quindi la **simmetria assiale**, in questo senso, ci appare come la **"isometria regina"**,
quella che, volendo, può essere assunta come l' "ingrediente base" di qualsiasi altra isometria.

Si può poi dimostrare che
- **componendo un numero PARI di simmetrie assiali si ottiene sempre una isometria diretta;**
- **componendone un numero DISPARI, si ha una isometria inversa.**

❑ L'ISOMETRIA IDENTICA (= IDENTITA')

La indicheremo col simbolo I. E' l'isometria banale che "lascia tutto fermo": $I(P) = P, \ \forall P$.
Pur essendo banale, ha un'importanza teorica notevole.