8. TEOREMI SULLA COMPOSIZIONE (= APPLICAZIONE SUCCESSIVA) DI DUE ISOMETRIE

1) La composizione di due simmetrie assiali con assi paralleli è una traslazione.
Il vettore di questa traslazione è il doppio della “distanza vettoriale orientata” del 1° asse dal 2°.

2) La composizione di due simmetrie assiali con assi incidenti è una rotazione
- il cui centro è il punto di intersezione dei due assi,
- e il cui angolo è il doppio dell’angolo orientato individuato dai due assi, presi nell’ordine.

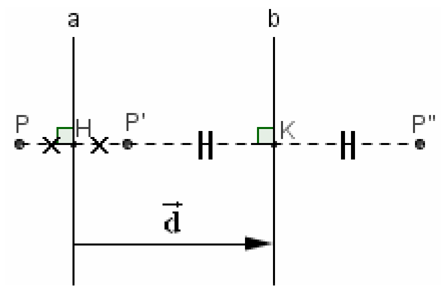
3) La composizione di due simmetrie centrali di centri O_1, O_2 è la traslazione di vettore $2\overrightarrow{O_1O_2}$.

4) La composizione di due traslazioni di vettori $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ è la traslazione di vettore $\vec{v_1}+\vec{v_2}$.

5) La **composizione di due rotazioni aventi lo stesso centro**, è ancora una rotazione, avente
- per centro lo stesso centro,
- e per angolo di rotazione la somma algebrica degli angoli delle rotazioni componenti.

6) La **composizione di un’omotetia con un’isometria o viceversa**
muta sempre un triangolo in un altro simile ed è per questo chiamata “**similitudine**”.

Dimostrazione di 1)



$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "s_a"] \arrow[rr, bend left, "s_b \circ s_a"] & P' \arrow[r, "s_b"] & P'' \end{tikzcd}$$

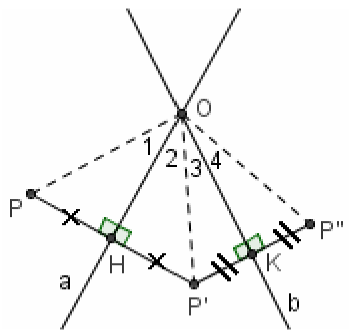
Il simbolo $s_b \circ s_a$ indica
la trasformazione che si ottiene applicando
i. s_a al punto P iniziale,
ii. poi s_b al punto P' ottenuto.

Osserviamo che
la trasformazione applicata PER PRIMA viene scritta PER ULTIMA.

$$\boxed{PP''} = PP' + P'P'' = 2HP' + 2P'K = 2(HP' + P'K) = 2HK \boxed{= 2\vec{d}}$$

Nella catena, tutti i segmenti vanno pensati orientati.
Il vettore $\vec{d}$ esprime anch’esso una distanza “orientata” (da a verso b)

Dimostrazione di 2)



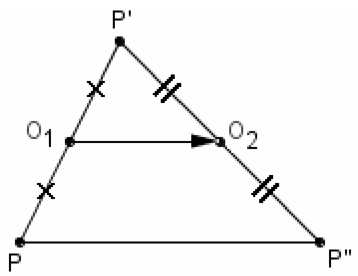
$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "s_a"] \arrow[rr, bend left, "s_b \circ s_a"] & P' \arrow[r, "s_b"] & P'' \end{tikzcd}$$

$OPH = OP'H,\ \ OP'K = OP''K$ (1° Criterio)

Perciò $\hat{O}_1 = \hat{O}_2;\ \hat{O}_3 = \hat{O}_4;\ \ \boxed{OP''} = OP' \boxed{= OP}$

$$\boxed{P\hat{O}P''} = P\hat{O}P' + P'\hat{O}P'' = 2\hat{O}_2 + 2\hat{O}_3 = 2\left(\hat{O}_2 + \hat{O}_3\right) = 2H\hat{O}K \boxed{= 2\widehat{ab}}$$

Dimostrazione di 3)

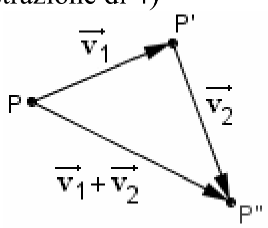


$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "s_1"] \arrow[rr, bend left, "s_2 \circ s_1"] & P' \arrow[r, "s_2"] & P'' \end{tikzcd}$$

In $PP'P''$, O_1O_2 è la congiungente i punti medi di due lati:
perciò

$$\left.\begin{array}{l} PP'' \parallel O_1O_2 \\ PP'' = 2O_1O_2 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{\overrightarrow{PP''} = 2\overrightarrow{O_1O_2}}$$

Dimostrazione di 4)



$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\tau_1"] \arrow[rr, bend left, "\tau_2 \circ \tau_1"] & P' \arrow[r, "\tau_2"] & P'' \end{tikzcd}$$

$$\boxed{PP''_{\text{orientato}} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2}$$

La *somma di due vettori* si effettua
- applicandoli uno di seguito all’altro, per poi prendere il vettore che parte dall’inizio del primo e termina sulla punta del secondo, proprio come illustrato qui a sinistra
- oppure con l’equivalente “regola del parallelogrammo” ⇨