# 14. APPROFONDIMENTO: TRASFORMAZIONI UN PO' PIU' GENERALI

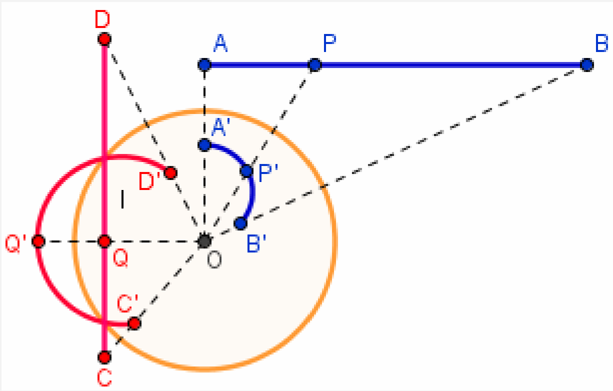
Il nostro discorso sulle trasformazioni piane si è ben presto focalizzato su trasformazioni molto "regolari", e precisamente quelle che "conservano l'allineamento e l'ordine dei punti allineati": le cosiddette AFFINITA'.
Tuttavia, abbiamo subito evidenziato che esistono pure trasformazioni geometriche non dotate di questa regolarità.

## INVERSIONE PER RAGGI VETTORI RECIPROCI

Un bell'esempio è rappresentato dalla "**inversione per raggi vettori reciproci**".
Fissata su di un piano una circonferenza di centro O e raggio r, ad ogni punto P del piano (distinto da O) si fa corrispondere quel punto $P'$, che appartiene alla semiretta OP ed è tale che $OP' = \frac{r^2}{OP}$.

La figura qui a fianco mostra:

- un segmento AB e la sua immagine (che risulta essere un arco di circonferenza)
- un altro segmento CD e la sua immagine (ancora un arco di circonferenza).




Si obietterà tuttavia:
ma non si tratta di una VERA trasformazione piana!
Infatti, il punto O è privo di immagine.

L'osservazione è giusta.
Se un punto P è vicinissimo a O, la sua immagine $P'$ sarà esterna alla circonferenza e lontanissima da O; in pratica, l'immagine di O dovrebbe essere un … "punto all'infinito".

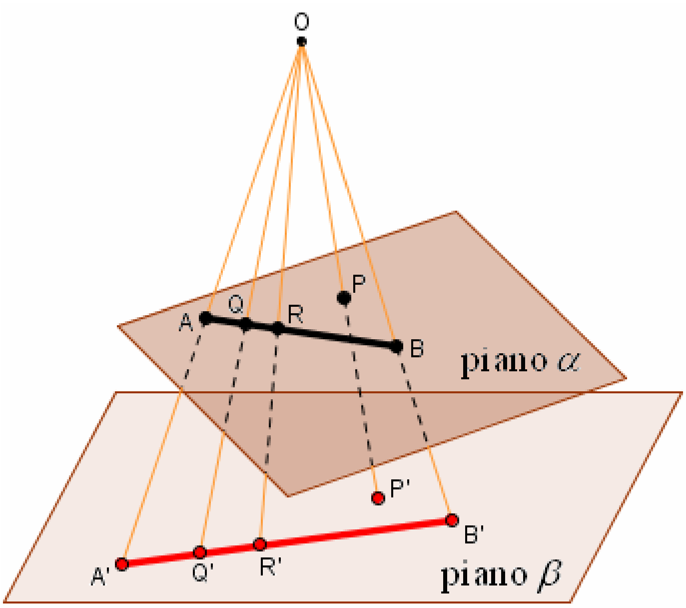
Siamo allora di fronte ad una ESTENSIONE del concetto di "trasformazione piana": la corrispondenza del piano in sé, che stiamo considerando, non è perfettamente biunivoca.
Essa diventa tuttavia biunivoca se togliamo dal piano il punto O; oppure, se decidiamo di far corrispondere al punto O … il punto O stesso (ma in questo caso, introdurremmo una "forzatura": se i punti vicini a O vengono trasformati in punti lontani da O, non è molto coerente convenire che l'immagine di O sia O stesso).

## TRASFORMAZIONI PROIETTIVE

Bellissime trasformazioni sono le "trasformazioni proiettive" (o "proiettività").

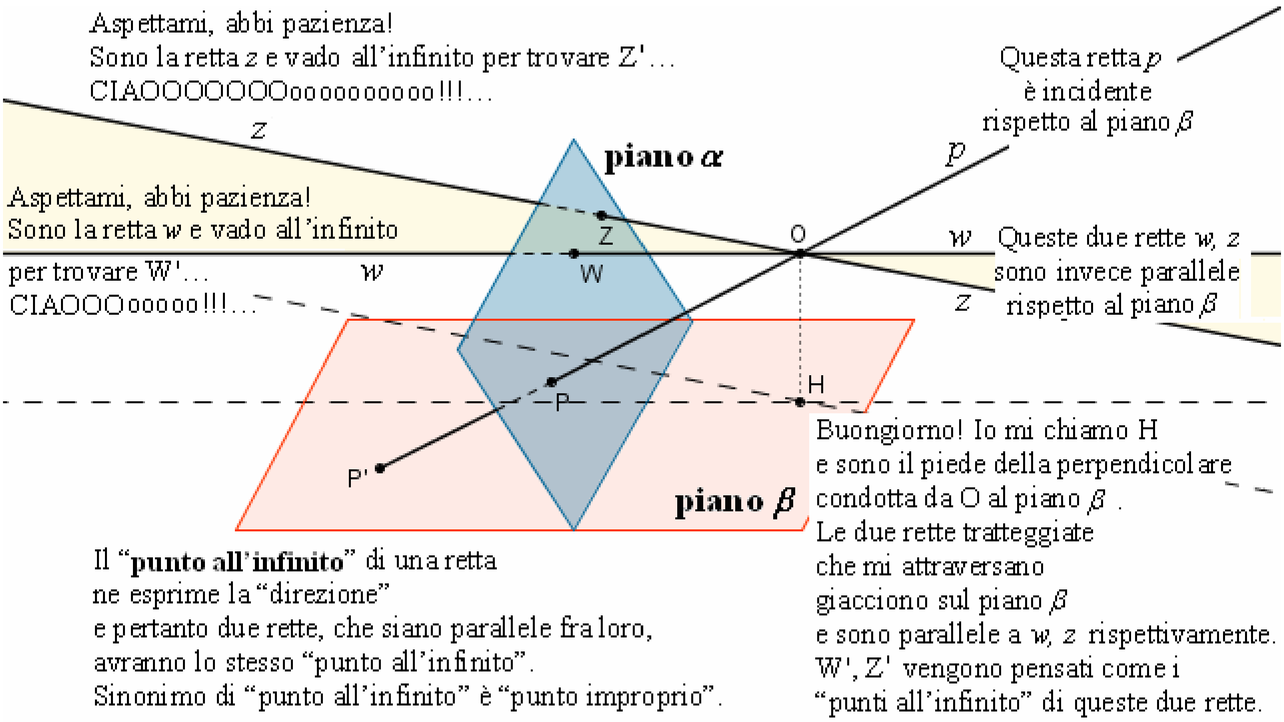
Siano fissati nello spazio due piani $\alpha$ e $\beta$, incidenti o paralleli.
Fissiamo inoltre un punto O che non stia né sull'uno, né sull'altro piano.
Tracciamo una retta per O: questa intersecherà il piano $\alpha$ in un punto P (se non è parallela ad $\alpha$), e il piano $\beta$ in $P'$ (se non è parallela a $\beta$).

Diremo che $P'$ è il corrispondente di P nella trasformazione che chiameremo "proiezione di centro O".




Anche in questo caso, occorre essere un po' "elastici".
Se i due piani $\alpha$, $\beta$ sono paralleli, tutto regolare perché ad ogni punto del primo resta effettivamente associato uno e un solo punto del secondo.
Se invece i due piani NON sono paralleli, una retta passante per O, e parallela a $\beta$, intersecherà $\alpha$ in un punto W, ma NON andrà poi ad intersecare $\beta$.
Dunque W si troverebbe a non avere immagine.

Tuttavia, come la figura sottostante dovrebbe ben illustrare,
in questo caso possiamo pensare che a W corrisponda uno dei “punti all’infinito” di $\beta$ .
Vale a dire, per “trovare un’immagine” anche a W,
noi andiamo a “completare” il piano $\beta$ con un “punto all’infinito”.
Anzi, lo completeremo con **infiniti** **“punti all’infinito”**, ciascuno associato ad una determinata “direzione” su $\beta$ .




- E’ evidente che anche il piano $\alpha$ andrà pensato “completato coi suoi punti all’infinito”
(ciascuno associato a una “direzione” su $\alpha$ ).
E certo! In tal modo, infatti, si troverà un controimmagine anche a quei punti di $\beta$ ,
che altrimenti non l’avrebbero, in quanto appartenenti ad una retta per O, parallela ad $\alpha$ .
- Anziché a proiezioni “centrali” potremmo pensare anche a **proiezioni “parallele”**:
si sceglie una direzione nello spazio e ad ogni punto P di $\alpha$ , si fa corrispondere quel punto $P'$ di $\beta$ ,
tale che la retta $PP'$ abbia QUELLA direzione.

**TRASFORMAZIONI TOPOLOGICHE**

Fra le trasformazioni piane diamo infine un cenno alla famiglia delle cosiddette trasformazioni *topologiche*.

Prendiamo un foglio realizzato in gomma e disegniamoci sopra una circonferenza.
Se ora tiriamo il foglio in modo da deformarlo, la circonferenza si trasformerà in una curva chiusa
la cui forma dipenderà dal modo particolare con cui avremo deformato il foglio.
Possiamo dire, in termini intuitivi, che una trasformazione si dice “topologica”
se la figura immagine può essere pensata come ottenibile dalla figura iniziale mediante una deformazione continua,
a base di piegamenti stiramenti o compressioni, senza però che intervengano strappi o tagli.
Le figure che vengono sottoposte a trasformazioni di questo tipo, ne vengono profondamente “sconvolte”,
tuttavia qualche proprietà si conserva anche qui, nel passaggio da una figura alla sua immagine:
ad esempio, il numero degli eventuali buchi, su di una superficie,
rimane invariato in ogni trasformazione topologica della superficie stessa.

E’ evidente che, se pensiamo a “piegamenti” oltre che a “stiramenti”, di una superficie,
non potremo pretendere di rimanere su di un piano, ma opereremo “in tre dimensioni”.
D’altra parte, anche nel considerare le proiettività, abbiamo fatto ricorso a DUE piani distinti,
collocati nello SPAZIO TRIDIMENSIONALE.
Insomma, il discorso ci ha condotto, a partire dallo studio delle trasformazioni piane, a uscire
dall’ “appiattimento” su di un piano, per concepire situazioni più generali … ma senza dubbio, perlomeno curiose.

Se avrai occasione di approfondire il discorso sulle trasformazioni proiettive e topologiche,
scoprirai un mondo affascinante, in qualche modo “sopraelevato” rispetto alla “normale” geometria,
la quale, da questo punto di osservazione privilegiato, svelerà nuovi insospettati segreti.
Un’indicazione bibliografica: “Che cos’è la matematica?” di R. Courant e H. Robbins, edizioni Boringhieri 1971.