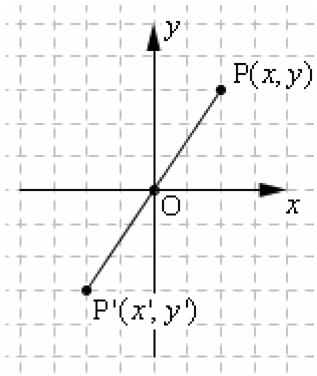
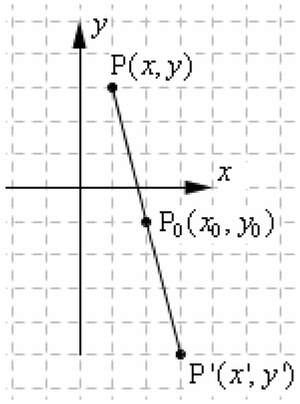
16. AFFINITA’ PARTICOLARI (TRASLAZIONI, SIMMETRIE, OMOTETIE) DESCRITTE IN COORDINATE, NEL PIANO CARTESIANO

SIMMETRIA RISPETTO ALL’ORIGINE



$$s_0 : \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

SIMMETRIA RISPETTO AD UN PUNTO



P_0 è il punto medio del segmento PP', perciò

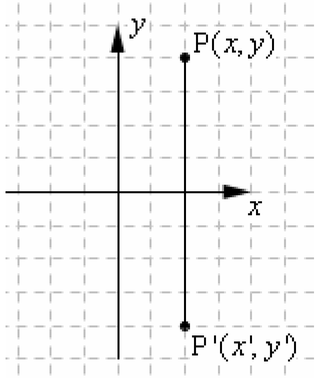
(ascissa punto medio = = media ascisse estremi, idem per l’ordinata)

$$x_0 = \frac{x + x'}{2} \to x' = 2x_0 - x$$

$$y_0 = \frac{y + y'}{2} \to y' = 2y_0 - y$$

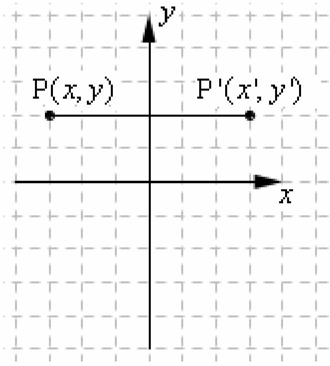
$$s_{P_0} : \begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases}$$

SIMMETRIA RISPETTO ALL’ASSE *x*



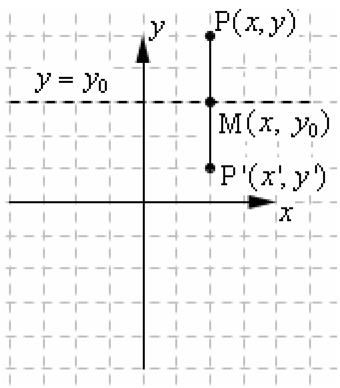
$$s_{asse\ x} : \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

SIMMETRIA RISPETTO ALL’ASSE *y*



$$s_{asse\ y} : \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

SIMMETRIA RISPETTO A UNA PARALLELA ALL’ASSE *x*



M è il punto medio di PP', perciò

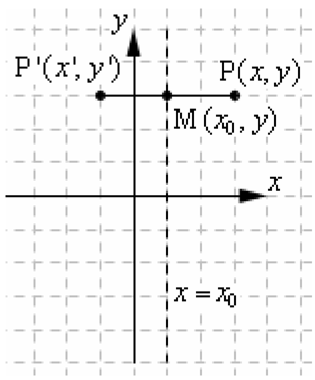
$$y_0 = \frac{y + y'}{2}$$

$$\downarrow$$

$$y' = 2y_0 - y$$

$$s_{y=y_0} : \begin{cases} x' = x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases}$$

SIMMETRIA RISPETTO A UNA PARALLELA ALL’ASSE *y*



M è il punto medio di PP', perciò

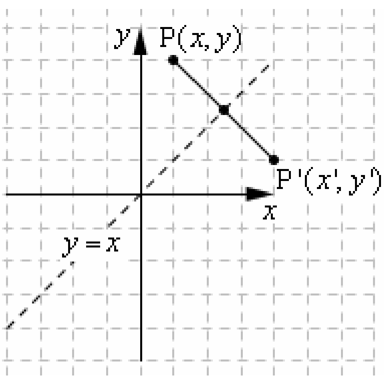
$$x_0 = \frac{x + x'}{2}$$

$$\downarrow$$

$$x' = 2x_0 - x$$

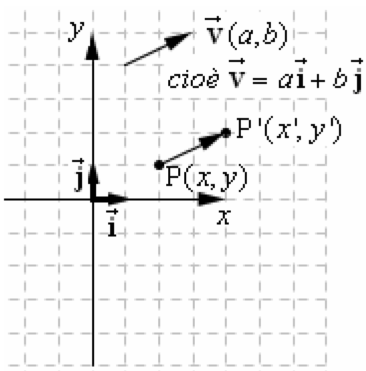
$$s_{x=x_0} : \begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = y \end{cases}$$

SIMMETRIA RISPETTO ALLA BISETTRICE DEL 1° E 3° QUADRANTE



$$s_{y=x} : \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

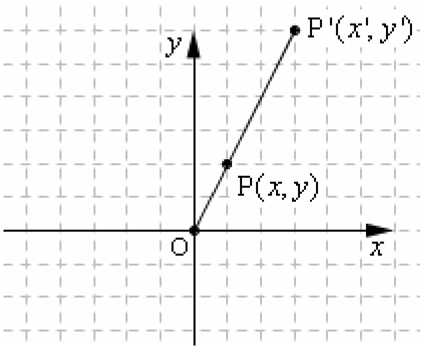
TRASLAZIONE DI VETTORE $\vec{\mathbf{v}}(a, b)$ ossia di componente orizzontale *a* e verticale *b*



$$\tau_{\vec{v}} : \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

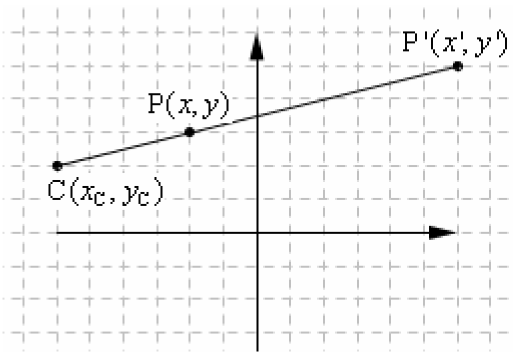
$\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$ sono i cosiddetti “versori” degli assi (di modulo unitario). Nell’esempio a fianco, è a=2, b=1

OMOTETIA DI CENTRO L'ORIGINE E RAPPORTO $k \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ (nella figura è $k = 3$)



$$\boldsymbol{\omega_{\mathrm{O},k}} : \begin{cases} \boldsymbol{x' = kx} \\ \boldsymbol{y' = ky} \end{cases}$$

OMOTETIA DI CENTRO $\mathrm{C}(x_{\mathrm{C}}, y_{\mathrm{C}})$ E RAPPORTO $k \in \mathbb{R}^*$ (nella figura è $k = 3$)



$\mathrm{CP}' = k \cdot \mathrm{CP}$ (segmenti orientati)

$$\downarrow$$

$$x_{\mathrm{P}'} - x_{\mathrm{C}} = k(x_{\mathrm{P}} - x_{\mathrm{C}})$$
$$y_{\mathrm{P}'} - y_{\mathrm{C}} = k(y_{\mathrm{P}} - y_{\mathrm{C}})$$

$$\boldsymbol{\omega_{\mathrm{C},k}} : \begin{cases} \boldsymbol{x' - x_{\mathrm{C}} = k(x - x_{\mathrm{C}})} \\ \boldsymbol{y' - y_{\mathrm{C}} = k(y - y_{\mathrm{C}})} \end{cases}$$

$\begin{cases} x' = kx + (1-k)x_{\mathrm{C}} \\ y' = ky + (1-k)y_{\mathrm{C}} \end{cases}$ da cui, ponendo $\begin{array}{l} (1-k)x_{\mathrm{C}} = a \\ (1-k)y_{\mathrm{C}} = b \end{array}$

$$\boldsymbol{\omega_{\mathrm{C},k}} : \begin{cases} \boldsymbol{x' = kx + a} \\ \boldsymbol{y' = ky + b} \end{cases} \quad \text{(NOTA)}$$

NOTA Se le equazioni di un'omotetia sono assegnate sotto la forma $\begin{cases} x' = kx + a \\ y' = ky + b \end{cases}$

allora sarà possibile risalire al centro di omotetia in due modi alternativi:

1) ricordando le posizioni

$$a = (1-k)x_{\mathrm{C}}$$
$$b = (1-k)y_{\mathrm{C}}$$

da cui:

$$x_{\mathrm{C}} = \frac{a}{1-k}$$
$$y_{\mathrm{C}} = \frac{b}{1-k}$$

2) oppure semplicemente determinando il punto unito della trasformazione.

Esempio:

per trovare il centro C dell'omotetia $\begin{cases} x' = 3x - 4 \\ y' = 3y + 5 \end{cases}$

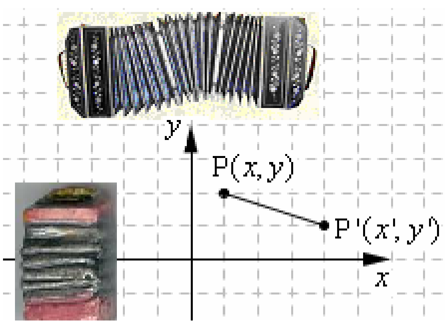
mi basta trovare il punto (x, y)

la cui immagine (x', y') coincide con (x, y)!

$$\begin{cases} x = 3x - 4 \\ y = 3y + 5 \end{cases} \to \begin{cases} x = 2 \\ y = -5/2 \end{cases} \quad \mathrm{C}\left(2, -\frac{5}{2}\right)$$

DILATAZIONE DI CENTRO L'ORIGINE E RAPPORTI h (orizzontale), k (verticale)

$h, k \in \mathbb{R}^*$; nella figura è $h = 4$, $k = 1/2$



$$\boldsymbol{d_{\mathrm{O},h,k}} : \begin{cases} \boldsymbol{x' = hx} \\ \boldsymbol{y' = ky} \end{cases}$$

Nella figura,
la fisarmonica orizzontale
si apre (h=4),
quella verticale
si chiude (k=1/2)

Generalizzazione:
se il centro non fosse l'origine
ma un dato punto
$\mathrm{C}(x_{\mathrm{C}}, y_{\mathrm{C}})$,
le equazioni diventerebbero

$$\boldsymbol{d_{\mathrm{C},h,k}} : \begin{cases} \boldsymbol{x' - x_{\mathrm{C}} = h(x - x_{\mathrm{C}})} \\ \boldsymbol{y' - y_{\mathrm{C}} = k(y - y_{\mathrm{C}})} \end{cases}$$