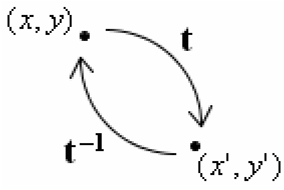
17. COME SCRIVERE LE EQUAZIONI DELLA TRASFORMAZIONE INVERSA DI UNA TRASFORMAZIONE DATA

Consideriamo una trasformazione t di equazioni

$$t: \begin{cases} x' = A(x, y) \\ y' = B(x, y) \end{cases}$$



Per **"trasformazione inversa" della *t*** si intende, come sappiamo, quella **trasformazione** (si indica con t^{-1})
che fa "tornare indietro", dal punto (x', y') al punto (x, y).

Abbiamo già osservato che:

- l'inversa di una traslazione è la traslazione di vettore opposto;
- l'inversa di un'omotetia di centro C e rapporto k è l'omotetia di centro C e rapporto $1/k$;
- l'inversa di una simmetria (centrale o assiale) è la simmetria stessa; ecc.

Ma **come si fa, data una trasformazione, a scrivere le equazioni della trasformazione inversa?** Vediamo.
Si prendono le equazioni della trasformazione data …

IN GENERALE:

$$t: \begin{cases} x' = A(x, y) \\ y' = B(x, y) \end{cases}$$

ESEMPIO:

$$t: \begin{cases} x' = 3x - 2 \\ y' = 3y - 4 \end{cases}$$

… e si risolve il sistema rispetto a *x* ed *y*, isolando cioè *x*, *y*:

$$t^{-1}: \begin{cases} x = C(x', y') \\ y = D(x', y') \end{cases} \quad (1)$$

$$t^{-1}: \begin{cases} x = \dfrac{x'+2}{3} \\ y = \dfrac{y'+4}{3} \end{cases} \quad (1)$$

NOTA: in questo caso il procedimento di inversione è stato semplicissimo; nella pagina a fianco troverai esercizi più complicati

Fatto! Ecco che abbiamo ricavato le equazioni della trasformazione inversa.

In questo momento nelle equazioni della trasformazione inversa, così come le abbiamo ottenute, il punto INIZIALE è indicato con (x', y') e il punto FINALE con (x, y): $(x', y') \xrightarrow{t^{-1}} (x, y)$.

MA NOI, SE VOGLIAMO, POSSIAMO SCAMBIARE I SIMBOLI, indicando, in queste equazioni della trasformazione inversa, il punto INIZIALE con (x, y) e quello FINALE con (x', y'):

$(x, y) \xrightarrow{t^{-1}} (x', y')$,

il che corrisponde a pensare la t^{-1} come una trasformazione a sé stante, liberandoci dal doverla per forza immaginare come l'inversa di un'altra.
Se facciamo così, otteniamo:

$$t^{-1}: \begin{cases} x' = C(x, y) \\ y' = D(x, y) \end{cases} \quad (2)$$

$$t^{-1}: \begin{cases} x' = \dfrac{x+2}{3} \\ y' = \dfrac{y+4}{3} \end{cases} \quad (2)$$

… ed è importante capire che **le equazioni (1) e le equazioni (2) sono … LA STESSA COSA, nel senso che sia le (1) che le (2) individuano la medesima trasformazione, la nostra brava t^{-1}…**
… la differenza sta solo nei *simboli* con cui si indicano le coordinate del punto iniziale e di quello finale.

RICAPITOLAZIONE

Sia t la trasformazione di equazioni $t: \begin{cases} x' = A(x, y) \\ y' = B(x, y) \end{cases}$

Se vogliamo scrivere le EQUAZIONI DELLA TRASFORMAZIONE INVERSA t^{-1}

1) invertiamo le equazioni di t isolando, in esse, x e y e ottenendo $t^{-1}: \begin{cases} x = C(x', y') \\ y = D(x', y') \end{cases}$

2) scambiamo (x, y) con (x', y') (almeno nei casi in cui vogliamo pensare la t^{-1} come una trasf. a sé stante)

così da scrivere la t^{-1} nella forma, equivalente alla precedente ma più consueta, $t^{-1}: \begin{cases} x' = C(x, y) \\ y' = D(x, y) \end{cases}$

ALTRI ESEMPI

- Invertire la trasformazione $t:\begin{cases}x'=x-y\\ y'=2y-4\end{cases}$

  Interpreto le equazioni come finalizzate a ricavare la coppia (x,y) nota la coppia (x',y');
  scambio perciò i membri e innanzitutto faccio in modo che a primo membro ci siano soltanto x e y:

  $$\begin{cases}x-y=x'\\ 2y-4=y'\end{cases};\quad\begin{cases}x-y=x'\\ 2y=y'+4\end{cases}$$

  dopodiché ricavo x e y:

  $$\begin{cases}y=\dfrac{y'+4}{2}\\ x=x'+y=x'+\dfrac{y'+4}{2}=\dfrac{2x'+y'+4}{2}\end{cases}\quad\to\quad\begin{cases}x=\dfrac{2x'+y'+4}{2}\\ y=\dfrac{y'+4}{2}\end{cases}$$

  Ora posso scambiare la coppia (x,y) con la (x',y') e, se voglio, spezzare le frazioni:

  $$t^{-1}\begin{cases}x'=\dfrac{2x+y+4}{2}\\ y'=\dfrac{y+4}{2}\end{cases}\quad\text{oppure}\quad t^{-1}\begin{cases}x'=x+\dfrac{1}{2}y+2\\ y'=\dfrac{1}{2}y+2\end{cases}$$

- Invertire la trasformazione $t:\begin{cases}x'=2x+y+1\\ y'=x-2y\end{cases}$

  Porto x e y, che sono le mie incognite, a primo membro: $\begin{cases}2x+y=x'-1\\ x-2y=y'\end{cases}$

  dopodiché ricavo x e y:

  $$\begin{cases}x=y'+2y\\ 2(y'+2y)+y=x'-1;\quad 2y'+4y+y=x'-1;\quad 5y=x'-2y'-1;\quad y=\dfrac{x'-2y'-1}{5}\end{cases}$$

  $$\begin{cases}y=\dfrac{x'-2y'-1}{5}\\ x=y'+2y=y'+2\cdot\dfrac{x'-2y'-1}{5}=y'+\dfrac{2x'-4y'-2}{5}=\dfrac{5y'+2x'-4y'-2}{5}=\dfrac{2x'+y'-2}{5}\end{cases}$$

  $$\begin{cases}x=\dfrac{2x'+y'-2}{5}\\ y=\dfrac{x'-2y'-1}{5}\end{cases}$$

  Ora posso scambiare la coppia (x,y) con la (x',y') e, se voglio, spezzare le frazioni:

  $$t^{-1}\begin{cases}x'=\dfrac{2x+y-2}{5}\\ y'=\dfrac{x-2y-1}{5}\end{cases}\quad\text{oppure}\quad t^{-1}\begin{cases}x'=\dfrac{2}{5}x+\dfrac{1}{5}y-\dfrac{2}{5}\\ y'=\dfrac{1}{5}x-\dfrac{2}{5}y-\dfrac{1}{5}\end{cases}$$

- Invertire la trasformazione $t:\begin{cases}x'=x+y\\ y'=x-3y\end{cases}$

$$\begin{cases}x+y=x'\\ x-3y=y'\end{cases}\quad\begin{matrix}(1)-(2)\\ (1)\end{matrix}\begin{cases}4y=x'-y';\quad y=\dfrac{x'-y'}{4}\\ x=x'-y=x'-\dfrac{x'-y'}{4}=\dfrac{4x'-x'+y'}{4}=\dfrac{3x'+y'}{4}\end{cases}\quad\to\quad t^{-1}\begin{cases}x'=\dfrac{3x+y}{4}\\ y'=\dfrac{x-y}{4}\end{cases}$$