18. EQUAZIONE DELL' IMMAGINE DI UNA CURVA ASSEGNATA, ovvero: data una trasformazione, tramite le sue equazioni, e data una curva, tramite la sua equazione, scrivere l'equazione della curva immagine.

Consideriamo la trasformazione t di equazioni $\boxed{t:\begin{cases}x'=3x-2\\ y'=3y-4\end{cases}}$

e prendiamo la curva γ di equazione $\boxed{\gamma:\ \ y=2x+1}$

Vogliamo determinare l'equazione della curva immagine $\gamma'=t(\gamma)$.

Ragioniamo in questo modo: la curva immagine $\gamma'=t(\gamma)$ è l'insieme dei punti del piano cartesiano, le cui CONTROIMMAGINI appartengono alla curva γ.

Prendiamo perciò un generico punto del piano cartesiano.
Indichiamone le coordinate con (x', y'), perché noi vogliamo pensare quel punto come l'IMMAGINE di un altro punto (x, y) al quale ci proponiamo di risalire.

Che coordinate avrà la CONTROIMMAGINE del nostro punto (x', y')?
Per rispondere dovremo INVERTIRE le equazioni della trasformazione:

$$\begin{cases}x'=3x-2\\ y'=3y-4\end{cases} \to \begin{cases}x=\dfrac{x'+2}{3}\\ y=\dfrac{y'+4}{3}\end{cases}$$

e con ciò possiamo dire che la controimmagine di un generico punto (x', y') del piano cartesiano

è il punto le cui coordinate sono $\left(\dfrac{x'+2}{3}, \dfrac{y'+4}{3}\right)$

Adesso possiamo impostare la seguente catena di doppie implicazioni:

$$(x', y')\in\gamma' \ \leftrightarrow\ \left(\frac{x'+2}{3}, \frac{y'+4}{3}\right)\in\gamma \ \leftrightarrow\ \frac{y'+4}{3}=2\cdot\frac{x'+2}{3}+1 \ \leftrightarrow\ y'=2x'+3$$

Pertanto un generico punto (x', y') del piano cartesiano appartiene alla curva γ' se e solo se le sue coordinate verificano l'uguaglianza $\boxed{y'=2x'+3}$.

Ma ciò significa che quest'ultima equazione, la $y'=2x'+3$,
E' GIA' L'EQUAZIONE di γ' cercata,
proprio perché è un'uguaglianza che è verificata se e solo se (x', y') è un punto di γ'!

I simboli x', y' sono qui usati per indicare le coordinate del generico punto del piano cartesiano.
Dunque, volendo, essi possono essere tranquillamente sostituiti con i più consueti simboli x, y.

Concludendo, l'equazione di γ' è: $\boxed{y=2x+3}$.

RICAPITOLAZIONE E GENERALIZZAZIONE

Sia t la trasformazione di equazione $t:\begin{cases}x'=A(x,y)\\ y'=B(x,y)\end{cases}$

e sia γ una curva di equazione $y=f(x)$ oppure $F(x,y)=0$.

Se vogliamo scrivere l' EQUAZIONE DELLA CURVA IMMAGINE γ', i passi sono i seguenti:

1) **INVERTIAMO** le equazioni $\begin{cases}x'=A(x,y)\\ y'=B(x,y)\end{cases}$ in modo da ottenere $\begin{cases}x=C(x',y')\\ y=D(x',y')\end{cases}$
2) **SOSTITUIAMO** nell'equazione della curva data
3) **SOPPRIMIAMO GLI APICI**.

OSSERVAZIONE
Se abbiamo a disposizione le equazioni della TRASFORMAZIONE INVERSA,
già nella forma "a simboli scambiati" $t^{-1}:\begin{cases}x'=C(x, y)\\ y'=D(x, y)\end{cases}$,
il procedimento equivale semplicemente a
SOSTITUIRE I SECONDI MEMBRI DI QUESTE EQUAZIONI nell'equazione della curva assegnata.