19. EQUAZIONE DELLA CONTROIMMAGINE DI UNA CURVA DATA

Data una trasformazione *t* di equazioni $t:\begin{cases}x'=A(x,y)\\y'=B(x,y)\end{cases}$

e data una curva γ di equazione $y=f(x)$ oppure $F(x,y)=0$,
SE SI SOSTITUISCONO NELL'EQUAZIONE DELLA CURVA γ, AL POSTO DI *x* E *y*,
I DUE SECONDI MEMBRI $A(x,y)$ e $B(x,y)$,
SI OTTIENE L'EQUAZIONE ...
***NON* DELL'IMMAGINE, *BENSI'* DELLA CONTROIMMAGINE**
DELLA CURVA CONSIDERATA.

Ad esempio, con $t:\begin{cases}x'=3x-2\\y'=3y-4\end{cases}$ e $\gamma:\ y=2x+1$,

facendo la sostituzione $y=2x+1\ \rightarrow\ 3y-4=2(3x-2)+1$

si perviene a $y=2x+\frac{1}{3}$ che è la *contro*immagine della γ

(puoi controllarlo agevolmente con un disegno se osservi che
la trasformazione *t* del nostro esempio è l'omotetia di rapporto 3 e centro (1,2))

GIUSTIFICAZIONE

Un generico punto (x,y) del piano cartesiano appartiene alla curva controimmagine di γ se e solo se l'immagine di (x,y), ossia il punto di coordinate $x'=3x-2,\ \ y'=3y-4$, appartiene a γ.
Ma ciò avviene se e solo se ,
sostituendo le espressioni $3x-2,\ 3y-4$ al posto di *x* e di *y* rispettivamente, nell'equazione di γ,
si ottiene un'uguaglianza vera.

Riassumendo tutto il ragionamento in una catena di doppie implicazioni:

$$(x,y)\in t^{-1}(\gamma)\ \leftrightarrow\ (3x-2,\ 3y-4)\in\gamma\ \leftrightarrow\ 3y-4=2(3x-2)+1$$

ESERCIZI SU:
TRASFORMAZIONE INVERSA, CURVA IMMAGINE E CONTROIMMAGINE

Ecco qui di seguito una piccola rassegna di affinità. Scegline una e rispondi ai quesiti sottostanti.

$t_1:\begin{cases}x'=-2x+3\\y'=-2y\end{cases}$ $t_2:\begin{cases}x'=-x+6\\y'=-y-4\end{cases}$ $t_3:\begin{cases}x'=4-x\\y'=y\end{cases}$ $t_4:\begin{cases}x'=x+6\\y'=y-4\end{cases}$ $t_9:\begin{cases}x'=\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y\\y'=\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y\end{cases}$

$t_5:\begin{cases}x'=3x\\y'=-2y\end{cases}$ $t_6:\begin{cases}x'=x+y\\y'=2x-y-1\end{cases}$ $t_7:\begin{cases}x'=y\\y'=x\end{cases}$ $t_8:\begin{cases}x'=x-y-1\\y'=x+y+1\end{cases}$

a) 1) Quanto vale la "costante di affinità" $\mathrm{D}=ad-bc$?
2) L'affinità in esame è diretta o è inversa?
3) E' una isometria?
4) E' un "caso particolare" fra quelli del paragrafo 16
(traslazione, simmetria rispetto a un punto o a una parallela agli assi, omotetia …)?

b) 1) Determina, tramite passaggi algebrici, le equazioni dell'affinità inversa.
2) L'affinità in esame è involutoria?
3) Nel caso l'affinità considerata fosse "particolare", abbi cura di controllare se è confermato che
- l'inversa di una traslazione è la traslazione di vettore opposto;
- l'inversa di un'omotetia di rapporto *k* è un'omotetia con lo stesso centro, e rapporto 1/*k*;
- l'inversa di una simmetria (centrale o assiale) è la simmetria stessa

c) Determina l'immagine e poi la controimmagine:
1) della retta $r:\ y=2x+1$ 2) della circonferenza $\gamma:\ x^2+y^2=1$

SOLUZIONI + link agli SVOLGIMENTI COMPLETI: pagina seguente

SOLUZIONI **Per gli SVOLGIMENTI COMPLETI, puoi cliccare su questa freccia** ⇨

t_1	a1) D = +4 a2) Diretta a3) No a4) Sì, omotetia	b1) Inversa: $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \\ y' = -\frac{1}{2}y \end{cases}$ b2) No b3) OK	c1) Immagine: $y = 2x - 8$ c1) Controimmagine: $y = 2x - \frac{7}{2}$ c2) Immagine: $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ c2) Controimmagine: $x^2 + y^2 - 3x + 2 = 0$
t_2	a1) D = +1 a2) Diretta a3) Sì a4) Sì, simm. centr.	b1) Inversa: $\begin{cases} x' = -x + 6 \\ y' = -y - 4 \end{cases}$ b2) Sì b3) OK	c1) Immagine: $y = 2x - 17$ c1) Controimmagine: $y = 2x - 17$ c2) Immagine: $x^2 + y^2 - 12x + 8y + 51 = 0$ c2) Controimm.: $x^2 + y^2 - 12x + 8y + 51 = 0$
t_3	a1) D = −1 a2) Inversa a3) Sì a4) Sì, simm. ass.	b1) Inversa: $\begin{cases} x' = -x + 4 \\ y' = y \end{cases}$ b2) Sì b3) OK	c1) Immagine: $y = -2x + 9$ c1) Controimmagine: $y = -2x + 9$ c2) Immagine: $x^2 + y^2 - 8x + 15 = 0$ c2) Controimmagine: $x^2 + y^2 - 8x + 15 = 0$
t_4	a1) D = +1 a2) Diretta a3) Sì a4) Sì, traslazione	b1) Inversa: $\begin{cases} x' = x - 6 \\ y' = y + 4 \end{cases}$ b2) No b3) OK	c1) Immagine: $y = 2x - 15$ c1) Controimmagine: $y = 2x + 17$ c2) Immagine: $x^2 + y^2 - 12x + 8y + 51 = 0$ c2) Controimm.: $x^2 + y^2 + 12x - 8y + 51 = 0$
t_5	a1) D = −6 a2) Inversa a3) No a4) Sì, dilatazione	b1) Inversa: $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}x \\ y' = -\frac{1}{2}y \end{cases}$ b2) No b3) ⇨	c1) Immagine: $y = -\frac{4}{3}x - 2$ c1) Controimmagine: $y = -3x - \frac{1}{2}$ c2) Immagine: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ c2) Controimmagine: $9x^2 + 4y^2 = 1$
t_6	a1) D = −3 a2) Inversa a3) No a4) No	b1) Inversa: $\begin{cases} x' = \frac{x + y + 1}{3} \\ y' = \frac{2x - y - 1}{3} \end{cases}$ b2) No b3) Non rientra fra i casi part. visti	c1) Immagine: $y = -2$ c1) Controimmagine: $y = -\frac{2}{3}$ c2) Imm.: $5x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x + 4y - 7 = 0$ c2) Contr.: $5x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x + 2y = 0$
t_7	a1) D = −1 a2) Inversa a3) Sì a4) Sì, simm. ass.	b1) Inversa: $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$ b2) Sì b3) OK	c1) Immagine: $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ c1) Controimmagine: $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ c2) Immagine: $x^2 + y^2 = 1$ c2) Controimmagine: $x^2 + y^2 = 1$
t_8	a1) D = +2 a2) Diretta a3) No a4) No	b1) Inversa: $\begin{cases} x' = \frac{x + y}{2} \\ y' = \frac{-x + y - 2}{2} \end{cases}$ b2) No b3) Non rientra fra i casi part. visti	c1) Immagine: $y = -3x - 4$ c1) Controimmagine: $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ c2) Immagine: $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$ c2) Controimm.: $2x^2 + 2y^2 + 4y + 1 = 0$
t_9	a1) D = +1 a2) Diretta a3) Sì a4) No	b1) Inversa: $\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \\ y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \end{cases}$ b2) No b3) Non rientra fra i casi part. visti	c1) Immagine: $y = -2x - 1$ c1) Controimmagine: $y = \frac{2}{11}x + \frac{5}{11}$ c2) Immagine: $x^2 + y^2 = 1$ c2) Controimmagine: $x^2 + y^2 = 1$