**22. ESERCIZI SULLE AFFINITA'** (soluzioni alle pagine 312-313-314)

❑ **Studia le affinità seguenti:**

1) $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = 2y \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = 2x \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = x - y \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x' = 4x + y - 1 \\ y' = -x + 2y + 1 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x + 4 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = x + 3y \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + y \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x' = \dfrac{-x + 2y + 2}{3} \\ y' = \dfrac{4x + y - 2}{3} \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x' = -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}y \\ y' = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y \end{cases}$

10) $\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = -2x + 2y + 6 \end{cases}$ 11) $\begin{cases} x' = y \\ y' = x + 2 \end{cases}$ 12) $\begin{cases} x' = x \\ y' = x - y \end{cases}$ 13) $\begin{cases} x' = 7x + 24y \\ y' = 24x - 7y \end{cases}$ 14) $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 3x - 2y \end{cases}$

15) $\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y + 15 \end{cases}$ 16) $\begin{cases} x' = -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}y \\ y' = \dfrac{14}{5}x - \dfrac{2}{5}y \end{cases}$ 17) $\begin{cases} x' = 2x + y + 1 \\ y' = x + 2y + 1 \end{cases}$ 18) $\begin{cases} x' = -\dfrac{1}{2}x + 3 \\ y' = -\dfrac{1}{2}y + 6 \end{cases}$

❑ **Esercizi vari**

19) Considera l'affinità di equazioni: $\begin{cases} x' = x + y - 2 \\ y' = 2x - y \end{cases}$

e trova l'immagine e la controimmagine della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$
(circonferenza di centro l'origine e raggio 1)

20) Considera l'affinità di equazioni: $\begin{cases} x' = 3x - 2y - 1 \\ y' = 4x + y + 1 \end{cases}$

e trova l'immagine e la controimmagine della retta $x + y = 1$

21) Scrivi le equazioni:
a) della simmetria di centro $(2,3)$ b) della simmetria di centro $(-3,0)$

22) Scrivi le equazioni:
a) della simmetria $s_1$ di centro $C_1(1,1)$ b) della simmetria $s_2$ di centro $C_2(4,2)$
c) Successivamente, scrivi le equazioni dell'affinità composta $s_2 \circ s_1$, osservando che si tratta di una traslazione, il cui vettore è il doppio del vettore $\overrightarrow{C_1C_2}$

23) Dimostra *facendo uso di equazioni* che, in generale, il *prodotto*
( = composizione, applicazione successiva)
di due simmetrie di centri $C_1(x_1, y_1),\ C_2(x_2, y_2)$
è una traslazione il cui vettore è $2 \cdot \overrightarrow{C_1C_2}$
(supponendo di applicare prima $s_1$ poi $s_2$).

24) Scrivi le equazioni:
a) della simmetria il cui asse è la retta $x = 3$
b) della simmetria il cui asse è la retta $y = -1$

25) Scrivi le equazioni della simmetria: a) il cui asse è la retta $x = 1/2$ b) il cui asse è la retta $y = 1$
c) Successivamente, componi le due affinità
constatando che si ottiene la simmetria centrale di centro (1/2, 1).
Osserviamo che questa può anche essere interpretata
come una rotazione di 180° intorno al punto (1/2, 1):
ciò conferma che la composizione di due simmetrie assiali con assi incidenti è una rotazione.

26) Componi le due simmetrie assiali di assi $x = 1$ e $x = 3$,
constatando che (gli assi essendo paralleli) si ottiene una traslazione.

27) Componi (nell'ordine) le due simmetrie assiali aventi per assi
l'asse $x$ e, rispettivamente, la retta $y = x$.
Applica poi la trasformazione ottenuta al triangolo OAB, con $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(1,0)$, $\mathrm{B}(0,2)$,
per constatare che si tratta di una rotazione di 90° in senso antiorario intorno all'origine.

28) Se io ti dico che le due curve di equazioni $x^2 + xy = 1$; $x^2 + xy + 2y = 5$
sono simmetriche l'una dell'altra rispetto a un punto, tu riesci a trovarmi le coordinate del punto?

29) Si sa che la curva di equazione $x^2 - xy + y^2 - x - 4y + 7 = 0$ è simmetrica rispetto a un punto
("simmetrica" vuol dire "simmetrica di sé stessa", ossia "mutata in sé stessa dalla simmetria").
Trovare le coordinate del punto.

30) Scrivi le equazioni:
a) dell'omotetia di centro $(3, 4)$ e rapporto $-2$
b) dell'omotetia di centro $(0, 1)$ e rapporto $3$

31) Scrivi le equazioni:
a) dell'omotetia $\omega_1$ di centro $\mathrm{C}_1(1,2)$ e rapporto $k_1 = 3$
b) e dell'omotetia $\omega_2$ di centro $\mathrm{C}_2(4,-1)$ e rapporto $k_2 = 1/6$
c) Successivamente, scrivi le equazioni dell'affinità composta $\omega_2 \circ \omega_1$,
osservando che si tratta ancora di un'omotetia,
il cui rapporto è il prodotto dei rapporti delle due omotetie di partenza,
e il cui centro è allineato coi loro centri.

32) Scrivi le equazioni della simmetria rispetto alla retta $y = 4x$.

33) Scrivi le equazioni della simmetria assiale di asse $r: y = x - 1$
Determina poi i punti uniti e le rette unite servendoti delle equazioni trovate:
constaterai, come del tutto prevedibile,
che c'è tutta una retta di punti uniti (la $r: y = x - 1$, ovviamente)
mentre sono rette unite, senza essere rette di punti uniti, tutte le $y = -x + q,\ q \in \mathbb{R}$.

34) *Si può dimostrare che un'affinità è individuata in modo unico se, per 3 punti non allineati del piano, vengono assegnate le rispettive immagini (anch'esse non allineate).*
Ciò premesso, determina l'affinità che fa corrispondere le seguenti coppie di punti:
$\mathrm{O}(0,0) \to \mathrm{O}'(1,0)$ $\quad$ $\mathrm{A}(1,0) \to \mathrm{A}'(2,1)$ $\quad$ $\mathrm{B}(0,1) \to \mathrm{B}'(3,3)$

35) Determina le equazioni dell'affinità che fa corrispondere le seguenti coppie di punti:
$\mathrm{A}(1,1) \to \mathrm{A}'(0,4)$ $\quad$ $\mathrm{B}(0,2) \to \mathrm{B}'(2,4)$ $\quad$ $\mathrm{C}(-1,1) \to \mathrm{C}'(2,2)$
e successivamente trovane gli elementi uniti.

36) Spiega perché non può esistere nessuna affinità che trasformi la terna di punti
$(1,3)$; $(2,6)$; $(3,9)$ nella terna $(1,1)$; $(2,3)$; $(3,2)$.

37) Determina i coefficienti *a, b, c, d, m, n* in modo che l'affinità $\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases}$
ammetta $y = x$ come retta di punti uniti, e muti $\mathrm{W}(1,2)$ in $\mathrm{W}'(2,0)$
Successivamente, stabilisci se l'affinità ammette altre rette unite oltre alla $y = x$.

38) Esistono valori dei parametri *a, b* tali che l'affinità $\begin{cases} x' = (a-1)x + by \\ y' = cx + (a-3)y + 4 \end{cases}$ sia un'isometria?

39) **UNA PROPRIETA' INTERESSANTE**
Dimostra che **ogni affinità "conserva il punto medio dei segmenti"**,
nel senso che l'immagine, attraverso una qualsiasi affinità, del punto medio di un segmento AB,
è *sempre* coincidente col punto medio del corrispondente segmento $\mathrm{A}'\mathrm{B}'$
(ricorda che l'ascissa del punto medio è la media delle ascisse, e analogamente per le ordinate).

**SOLUZIONI**

1) $\mathrm{D}=6$: affinità diretta che moltiplica per 6 le aree. Punto unito: l'origine. Rette unite: $y=0$; $y=-x$.

2) $\mathrm{D}=-2$: aff. inversa che raddoppia le aree. Punto unito: $\left(-\frac{1}{2},-1\right)$. Rette unite: $y=-2x-2$; $y=x-\frac{1}{2}$.

3) $\mathrm{D}=-2$: affinità inversa che raddoppia le aree. Punto unito: l'origine. Rette unite: $y=\frac{1}{3}x$; $x=0$.

4) $\mathrm{D}=9$: affinità diretta che moltiplica per 9 le aree. Punto unito: $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$. Retta unita: $y=-x$.

5) $\mathrm{D}=1$. E' un'isometria diretta; ha come punto unito $(-2,2)$ e non ha nessuna retta unita.

6) $\mathrm{D}=-3$: affinità inversa che triplica le aree.
Punto unito: $\left(1,-\frac{1}{2}\right)$. Due rette sono unite: la $y=-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}$ e la $x=1$.

7) $\mathrm{D}=2$. E' una similitudine diretta, che raddoppia le aree
(quindi, essendo una similitudine, ingrandisce i segmenti in "scala", moltiplicandone le lunghezze per $\sqrt{2}$);
ha come punto unito $(0,0)$ e non ha nessuna retta unita.

8) $\mathrm{D}=-1$: affinità inversa che conserva le aree. Ha una retta di punti uniti: $y=2x-1$.
Rette unite: oltre alla precedente, tutte quelle di coefficiente angolare $-1$ ($y=-x+q,\ q\in\mathbb{R}$).

9) $\mathrm{D}=-1$. E' una isometria inversa. Ha tutta una retta di punti uniti, la $y=2x$,
e ha altre infinite rette unite, quelle della forma $y=-\frac{1}{2}x+q,\ q\in\mathbb{R}$.

10) $\mathrm{D}=2$: affinità diretta che raddoppia le aree. Non ha punti uniti. Ha una retta unita: la $y=2x$

11) $\mathrm{D}=-1$. E' una isometria inversa. Non ha punti uniti. Ha una retta unita, la $y=x+1$.

12) $\mathrm{D}=-1$: affinità inversa che conserva le aree. Ha una retta di punti uniti: $y=\frac{1}{2}x$.
Rette unite: oltre alla precedente, tutte quelle parallele all'asse $y$ ($x=k,\ k\in\mathbb{R}$)

13) $\mathrm{D}=-625$. E' una similitudine inversa. In questa similitudine, dato che le aree vengono moltiplicate per 625, le lunghezze dei segmenti vengono moltiplicate per 25.
Ha come punto unito l'origine, e ha le due rette unite $y=\frac{3}{4}x$ e $y=-\frac{4}{3}x$

14) $\mathrm{D}=-1$: affinità inversa che conserva le aree. Ha una retta di punti uniti: $y=x$.
Rette unite: oltre alla precedente, tutte quelle di coeff. ang. 3 ($y=3x+q,\ q\in\mathbb{R}$).

15) Avrai riconosciuto che di tratta della traslazione il cui vettore ha componenti (3, 15).
E' dunque un'isometria diretta (se calcoli la costante di affinità, la troverai uguale a +1
e vedrai che nel determinante i termini su di una diagonale sono uguali
e quelli sull'altra diagonale entrambi nulli e quindi interpretabili come opposti)
e non ha punti uniti, ma in compenso ha come rette unite tutte quelle parallele al vettore di traslazione,
ossia tutte quelle di equazione $y=5x+q,\ q\in\mathbb{R}$.

16) $\mathrm{D}=-2$: affinità inversa che raddoppia le aree. Ha una retta di punti uniti: $y=2x$.
Oltre alla precedente, sono rette unite tutte le $y=-\frac{7}{4}x+q,\ q\in\mathbb{R}$.

17) $\mathrm{D}=3$: affinità diretta che triplica le aree.
Ammette tutta una retta di punti uniti (la $y=-x-1$)
e infinite rette unite (quelle di equazione $y=x+q,\ q\in\mathbb{R}$).

18) Ti sei accorto che si tratta di un'omotetia?
Essa dimezza le lunghezze e moltiplica per ¼ le aree;
l'unico suo punto unito è il centro di omotetia $(2,4)$
e ha invece infinite rette unite: se le ricerchi algebricamente, troverai
- ♪ le rette di equazione $y=mx-2m+4$,
  le quali, come puoi constatare sostituendo, passano tutte per il punto (2, 4),
  e hanno inclinazione non verticale che varia al variare di $m$;
- ♫ più la $x=2$, che è poi la retta verticale passante per (2, 4).

19) Immagine: $5x^2+2y^2-2xy+20x-4y+11=0$
Controimmagine: $5x^2+2y^2-2xy-4x-4y+3=0$

20) Immagine: $3x-5y+19=0$.
Controimmagine: $y=7x-1$

21) a) $\begin{cases} x'=4-x \\ y'=6-y \end{cases}$ b) $\begin{cases} x'=-6-x \\ y'=-y \end{cases}$

22) a) $\begin{cases} x'=2-x \\ y'=2-y \end{cases}$ b) $\begin{cases} x'=8-x \\ y'=4-y \end{cases}$

c) Componendo, si ottiene $\begin{cases} x'=x+6 \\ y'=y+2 \end{cases}$ che è effettivamente una traslazione,
il cui vettore ha componenti $(6,2)$ mentre le componenti di $\overrightarrow{C_1C_2}$ sono $(x_2-x_1,\ \ y_2-y_1)=(3,1)$

23) La simmetria di centro $C_1(x_1,y_1)$ ha equazioni: $\begin{cases} x'=2x_1-x \\ y'=2y_1-y \end{cases}$

e quella di centro $C_2(x_2,y_2)$ ha equazioni: $\begin{cases} x'=2x_2-x \\ y'=2y_2-y \end{cases}$.

Componiamole: $s_1:\begin{cases} x'=2x_1-x \\ y'=2y_1-y \end{cases}$ $s_2:\begin{cases} x''=2x_2-x' \\ y''=2y_2-y' \end{cases}$

$$s_2\circ s_1:\begin{cases} x''=2x_2-x'=2x_2-(2x_1-x)=2x_2-2x_1+x=x+2(x_2-x_1) \\ y''=2y_2-y'=2y_2-(2y_1-y)=2y_2-2y_1+y=y+2(y_2-y_1) \end{cases}$$

e $\begin{cases} x''=x+2(x_2-x_1) \\ y''=y+2(y_2-y_1) \end{cases}$ è proprio una traslazione, il cui vettore ha componenti $(2(x_2-x_1),\ 2(y_2-y_1))$ che sono proprio le componenti del vettore $2\overrightarrow{C_1C_2}$

24) a) $\begin{cases} x'=6-x \\ y'=y \end{cases}$ b) $\begin{cases} x'=x \\ y'=-2-y \end{cases}$

25) a) $\begin{cases} x'=1-x \\ y'=y \end{cases}$ b) $\begin{cases} x'=x \\ y'=2-y \end{cases}$

26) L'affinità composta è $\begin{cases} x'=x+4 \\ y'=y \end{cases}$: si tratta effettivamente di una traslazione.

27) Si ottiene $\begin{cases} x'=-y \\ y'=x \end{cases}$

28) Sottoponiamo una delle due curve, ad esempio la $x^2+xy=1$,
alla simmetria centrale avente per centro un punto $(x_0,y_0)$ da determinarsi
(basterà effettuare, nell'equazione della curva, le sostituzioni $x\to 2x_0-x,\quad y\to 2y_0-y$).
Imponiamo poi che l'equazione così ottenuta coincida con l'equazione dell'altra curva.
Otteniamo così un sistema di tre equazioni nelle due incognite $x_0,\ y_0$.
Tale sistema, nonostante il numero delle incognite superi il numero delle equazioni,
è, eccezionalmente, possibile (si usa dire: "compatibile"), per il fatto che l'esercizio era stato costruito "ad hoc",
in modo che le due curve *fossero, effettivamente*, simmetriche rispetto ad un punto.
Si trova $\begin{cases} x_0=-1 \\ y_0=2 \end{cases}$

29) $P_0(2,3)$

30) a) $\begin{cases} x' = -2x+9 \\ y' = -2y+12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = 3x \\ y' = 3y-2 \end{cases}$

31) a) $\begin{cases} x' = 3x-2 \\ y' = 3y-4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = \frac{1}{6}x + \frac{10}{3} \\ y' = \frac{1}{6}y - \frac{5}{6} \end{cases}$ c) $\omega_2 \circ \omega_1 = \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + 3 \\ y' = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2} \end{cases}$ $k = \frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{1}{6} = k_1 \cdot k_2$; $C(6,-3)$ *che è allineato con* $C_1(1,2)$ *e* $C_2(4,-1)$

32) Le relazioni che fanno passare dalla coppia $(x, y)$ alla $(x', y')$ si possono scrivere tenendo conto che:

- il punto medio del segmento $PP'$ deve appartenere alla $y = 4x$: $\frac{y+y'}{2} = 4 \cdot \frac{x+x'}{2}$
- la retta $PP'$ dev'essere perpendicolare alla $y = 4x$ e quindi avere coefficiente angolare –1/4: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y'-y}{x'-x} = -\frac{1}{4}$

Ponendo a sistema le due relazioni e risolvendo rispetto a $x'$, $y'$ si ottiene: $\begin{cases} x' = -\frac{15}{17}x + \frac{8}{17}y \\ y' = \frac{8}{17}x + \frac{15}{17}y \end{cases}$

Per un controllo di correttezza,
puoi applicare la trasformazione a qualche punto del piano,
ad esempio $O(0,0)$; $A(1,4)$; $B(4,-1)$, od altri.

33) $\begin{cases} x' = y+1 \\ y' = x-1 \end{cases}$

34) $\begin{cases} x' = x+2y+1 \\ y' = x+3y \end{cases}$

35) $\begin{cases} x' = -x+y \\ y' = x+y+2 \end{cases}$

Punto unito: $(-2,\ -4)$.
Rette unite: $r_1: y = -(\sqrt{2}-1)x - 2(\sqrt{2}+1)$, $r_2: y = (\sqrt{2}+1)x + 2(\sqrt{2}-1)$

36) Semplice: i primi 3 punti sono fra loro allineati, ma allora dovrebbero esserlo anche le rispettive immagini (un'affinità conserva l'allineamento!), mentre non lo sono.

37) $\begin{cases} x' = y \\ y' = 2x-y \end{cases}$

Sono rette unite tutte quelle di coefficiente angolare $-2$:
$y = -2x+q,\ q \in \mathbb{R}$

38) Sì: $a = 2,\ b = c = 0$

39) Devi considerare una generica affinità
$\begin{cases} x' = ax+by+m \\ y' = cx+dy+n \end{cases}$,
due generici punti $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$,
il punto medio $M\left(\frac{x_1+y_1}{2}, \frac{x_2+y_2}{2}\right)$ del segmento AB,
poi calcolare le coordinate delle rispettive immagini $A'$, $B'$ ed $M'$,
infine trovare le coordinate del punto medio del segmento $A'B'$
e constatare che tale punto medio coincide con $M'$.