LE MATRICI
E
I) IL TEOREMA DI ROUCHE'-CAPELLI PER I SISTEMI LINEARI
II) LE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE LINEARI

1. COS'E' E A COSA PUO' SERVIRE UNA "MATRICE"

E' assai frequente, in matematica, l'opportunità, o la necessità, di scrivere i dati da utilizzare inserendoli in modo opportuno all'interno di una tabella a righe e colonne.
Bene, uno schema di questo tipo viene chiamato "matrice".

Ad esempio, il modo più rapido ed essenziale per conservare l'informazione insita nel sistema

$$\begin{cases} 4x-7y=-1 \\ x+8y=29 \end{cases}$$

è di scriverne semplicemente la matrice dei coefficienti:

$$\begin{pmatrix} 4 & -7 & -1 \\ 1 & 8 & 29 \end{pmatrix}$$

Quest'ultima è una matrice "2×3", ossia a 2 righe e 3 colonne.

Di norma, una matrice si indica con una lettera maiuscola, a fianco della quale
si può scrivere, tra parentesi, il numero delle righe seguito da quello delle colonne.
Se per esempio decidiamo di chiamare "A" la matrice appena considerata, potremo scrivere

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 4 & -7 & -1 \\ 1 & 8 & 29 \end{pmatrix},$$

e avremo $\mathrm{A}(2\times 3)$.
Questa matrice ha 6 "elementi" o "termini" e 5 "linee", precisamente 2 righe e 3 colonne.
"Linea" è un termine generico che può indicare indifferentemente una riga oppure una colonna.

Ogni elemento presente in una matrice viene in genere indicato tramite la stessa lettera alfabetica utilizzata per contrassegnare la matrice, scritta però in minuscolo, e munita di una coppia di indici, il primo dei quali specifica la riga, e il secondo la colonna, su cui l'elemento è posizionato.

Riprendendo ad esempio la già considerata matrice $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 4 & -7 & -1 \\ 1 & 8 & 29 \end{pmatrix}$,

potremmo indicare i suoi elementi con: $a_{1,1}=4;\ a_{1,2}=-7;\ a_{1,3}=-1;\ a_{2,1}=1;\ a_{2,2}=8;\ a_{2,3}=29$
(alcuni omettono la virgola fra l'indice di riga e quello di colonna).

Una matrice con una sola linea viene anche chiamata "vettore".

Ad esempio, $(2\ \ 4\ \ 8\ \ 16)$ è un "**vettore riga**"; $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ è un "**vettore colonna**".

2. LE MATRICI QUADRATE E I LORO DETERMINANTI

Se una matrice ha tante righe quante colonne, si dirà che quella matrice è "quadrata", e il numero delle sue righe o, indifferentemente, colonne verrà detto "ordine" di quella matrice.

Ad esempio, la matrice $\mathrm{M}(2\times 2)$ seguente: $\mathrm{M}=\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$

è una matrice quadrata di ordine 2.

Per una matrice quadrata ha senso parlare di "determinante".
Dei "determinanti" si è già parlato nel Volume 1.

Nel caso della matrice M appena considerata, avremo

$$\det(\mathrm{M})=|\mathrm{M}|=\begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 10 \end{vmatrix}=-5\cdot 10-(-3)\cdot 4=-50+12=-38.$$

Ancora:

$$\text{se }\ \mathrm{B}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & -7 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix},\ \text{ sarà}$$

$$\det(\mathrm{B})=|\mathrm{B}|=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & -7 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix} 6 & -7 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=3\cdot(24-14)-2\cdot(20-7)+1\cdot(-10+6)=...=0$$

In una matrice quadrata,
la diagonale discendente si dice "diagonale principale",
l'altra "diagonale secondaria".

Riguardo ai **DETERMINANTI**, si potrebbe dimostrare che sussistono le utili **REGOLE** seguenti:

- **scambiando fra loro due linee parallele, il determinante cambia di segno**
- **scambiando le righe con le colonne, il valore del determinante non varia**
- **moltiplicando una linea (= ciascun elemento di una linea) per una costante, anche il valore del determinante risulterà moltiplicato per quella costante**
- **il valore di un determinante resta invariato se a una linea si sostituisce la somma di quella linea con un'altra ad essa parallela, eventualmente moltiplicata per una costante**

Capita inoltre con frequenza che non abbia particolare importanza calcolare il *valore* del determinante in gioco, ma soltanto stabilire se è *uguale a zero* o invece *diverso da zero*.
A tal proposito, si potrebbe dimostrare che **un determinante è certamente uguale a 0 qualora**:

- **ci sia in esso una linea composta da termini tutti nulli**
- **abbia due linee parallele identiche**
- **una linea sia uguale ad un'altra linea ad essa parallela moltiplicata per una costante**
- **una linea risulti uguale alla combinazione lineare (NOTA) di due o più linee ad essa parallele**

NOTA: cos'è una "COMBINAZIONE LINEARE"

Si dice "combinazione lineare" una somma algebrica i cui termini sono oggetti matematici della stessa specie, ciascuno moltiplicato per un suo coefficiente.

Gli "oggetti" in questione potranno essere vettori, equazioni, funzioni, ecc. ecc. ecc.:
si possono "combinare linearmente" tutte le entità per le quali abbia senso parlare
(I) di somma (II) e di moltiplicazione per un coefficiente.
Il risultato della combinazione lineare sarà ancora un oggetto della stessa specie.

- Ad es., $3\mathbf{v}+4\mathbf{w}$ o $-\mathbf{v}+0{,}3\mathbf{w}$ sono due fra le infinite possibili combinazioni lineari dei due vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$.
- Ancora: prese le equazioni $2x-3y=1$, $5x+y=11$, la loro combinazione lineare di coefficienti 7 e -6 è
  $7(2x-3y)-6(5x+y)=7\cdot 1-6\cdot 11$
  oppure, il che è equivalente, la somma membro a membro delle due equazioni
  $7(2x-3y)=7\cdot 1;\quad -6(5x+y)=-6\cdot 11$
- Nella matrice $\mathrm{M}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 11 & 15\end{pmatrix}$ la terza riga è somma del triplo della prima con la seconda,
  quindi è la combinazione lineare con coefficienti 3 e 1 delle prime due.

ESERCIZI

1) a) Calcola il valore del determinante $\begin{vmatrix}11 & -5\\ 4 & 2\end{vmatrix}$.

Deducine, senza altri calcoli, il valore dei determinanti b) $\begin{vmatrix}-5 & 11\\ 2 & 4\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}11 & 25\\ 4 & -10\end{vmatrix}$

2) a) Calcola il valore del determinante $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 4\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}$.

b) Quanto varrà allora il determinante $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ 4 & 5 & 4\end{vmatrix}$? c) E il $\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 4\end{vmatrix}$? d) E il $\begin{vmatrix}10 & 20 & 30\\ -2 & -5/2 & -2\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}$?

3) Fra i determinanti che seguono, riconosci quelli uguali a zero:

a) $\begin{vmatrix}2 & -3 & 7\\ 1 & -1 & 4\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}-7 & 2 & 9\\ -10 & 5 & 15\\ 8 & 5 & -3\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}-8 & 3 & 4\\ 4 & 6 & -2\\ -2 & -3 & 1\end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix}203 & 1 & 50\\ 233 & 11 & 50\\ 299 & 33 & 50\end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix}3 & 4 & 3 & -4\\ 2 & 1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ -3 & -4 & -5 & 6\end{vmatrix}$

RISPOSTE 1) a) 42 b) -42 c) -210 2) a) -8 b) 8 c) -8 d) 40 3) a) Vale 0, perché la prima riga è la somma algebrica delle altre due b) Vale 0, perché la seconda colonna è la somma delle altre due c) Vale 0: la seconda riga è uguale alla terza moltiplicata per -2 d) Vale 0: la prima colonna è uguale al quadruplo della terza più il triplo della seconda e) Vale 0 (la terza riga è la somma algebrica delle altre)

3. RANGO (o “CARATTERISTICA”) DI UNA MATRICE

Una **matrice quadrata** si dice “**singolare**” se il suo **determinante** è **uguale a 0**.

Una matrice A (qualsiasi, non necessariamente quadrata) ha rango n se:

a) da essa si può estrarre almeno una sottomatrice quadrata di ordine n, non “singolare”

b) tutte le sottomatrici quadrate, estraibili da A, di ordine superiore a n, sono invece “singolari”.

In altre parole: **si dice “rango” di una matrice l'ordine più grande, fra quelli di tutti i determinanti diversi da 0 estraibili dalla matrice.**

Esempio: la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango 3: infatti, i determinanti più grandi che si possono estrarre da essa sono quelli del 3° ordine, e ce n’è uno, precisamente $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix}$, che è diverso da 0.

Altro esempio: la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$ ha rango 1. Infatti si possono estrarre da essa determinanti di ordine 1 diversi da 0 (ad esempio $|1| = 1$) mentre tutti quelli di ordine 2 sono uguali a 0.

4. IL TEOREMA DI ROUCHE’-CAPELLI

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema lineare (= con tutte le equazioni di 1° grado) **sia “COMPATIBILE” (= ammetta almeno una soluzione),**
è che abbiano UGUAL RANGO due matrici:

- **quella dei soli coefficienti delle incognite**
- **e quella “completa”, che oltre ai coefficienti precedenti contiene anche la colonna dei termini noti**

ESEMPI

❑ Il sistema $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ x + 2y + 3z = 4 \end{cases}$ è compatibile. Infatti le due matrici $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ hanno lo stesso rango 3

(che il determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ sia uguale a 0 lo si vede senza far calcoli se si osserva che l’ultima colonna è uguale alla somma del doppio della prima con la seconda)

PREMESSA IMPORTANTE (che discende da quanto appreso nel Volume 1)

Un sistema di 1° grado CON TANTE EQUAZIONI QUANTE INCOGNITE è “determinato”, cioè ha 1 e 1 sola soluzione (NOTA), se e solo se il determinante dei coefficienti delle incognite è diverso da 0. Quando invece tale determinante vale 0, allora si ha un caso “speciale”, che potrà essere di impossibilità o di indeterminazione (bisognerà valutare di volta in volta).

NOTA: l’aggettivo “determinato/a”, riferito a un sistema o a una singola equazione, significa: “dotato/a di un numero *finito e non nullo* di soluzioni”.
Quando il sistema, o l’equazione, è di 1° grado, nel caso ciò avvenga la soluzione è *unica*.

❑ Il sistema $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ 2x + 4y + 6z = 3 \end{cases}$ ha tante equazioni quante incognite.

Sappiamo (vedi PREMESSA IMPORTANTE) che sarà “determinato” (= una e una sola soluzione) qualora il determinante dei coefficienti delle incognite sia diverso da 0.

Se consideriamo il determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ vediamo che è uguale a 0 (ultima riga proporzionale alla 1ª)

per cui è *escluso* che il sistema abbia una e una sola soluzione:
esso sarà impossibile oppure indeterminato, ossia di soluzioni ne avrà 0 oppure infinite.

Ma si osserva che la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ ha rango 2, mentre la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ ha rango 3

per cui, essendo diversi fra loro questi due ranghi, il sistema non è compatibile, è *impossibile*.

- Il sistema $\begin{cases} 5x+3y+z=14 \\ 2y-z=1 \\ 5x+y+2z=13 \end{cases}$ ha tante equazioni quante incognite.

Se andiamo a calcolare il determinante dei coefficienti delle incognite, ossia $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$,

vediamo che è uguale a 0, per cui possiamo star certi che il sistema NON è "determinato".

Ma allora, sarà impossibile o indeterminato?
Andiamo a calcolare i *ranghi* delle due matrici,
quella dei soli coefficienti delle incognite e quella completa,
e vediamo che sono *uguali* (entrambi valgono 2).
Perciò il sistema è *compatibile* (= ha almeno una soluzione)
e di conseguenza, non avendone una sola, ne avrà infinite, sarà *indeterminato*.

Ci possiamo domandare allora: quanti saranno i suoi "*gradi di libertà*" (Volume 1, pag. 403)?

Si può dimostrare che, qualora un sistema lineare
- non importa con quante equazioni e quante incognite -
sia compatibile, ossia abbia almeno una soluzione
- il che avviene, secondo il teorema di Rouché-Capelli, quando
la matrice dei soli coefficienti e la matrice completa hanno lo stesso rango -
allora, detto *r* questo rango comune e *n* il numero delle incognite,
la differenza $n-r$ darà il numero di "gradi di libertà".

Nel nostro esempio, dunque, il sistema ha $3-2=1$ gradi di libertà, per cui
fra le tre incognite, due potranno essere espresse in funzione dell'incognita rimanente.

RICAPITOLIAMO, CON UN APPROFONDIMENTO
Supponiamo che un sistema lineare sia indeterminato; indichiamo

- con *r* il rango comune alle due matrici dei soli coefficienti e completa
- con *m* il numero delle equazioni
- con *n* il numero delle incognite (non necessariamente uguale a *m*).

Allora il sistema avrà $n-r$ gradi di libertà.
E in questo caso si potrà:

I) estrarre, dal sistema dato, un sotto-sistema con *r* equazioni,
scelte in modo tale che la matrice dei coefficienti delle incognite abbia rango *r*

II) scegliere, in questo sotto-sistema, *r* incognite, in modo tale
che il determinante dei coefficienti di queste sia diverso da 0

III) trasportare le $n-r$ incognite rimanenti a secondo membro e risolvere,
esprimendo perciò *r* fra le incognite in funzione delle $n-r$ incognite rimanenti.

Riprendiamo, per illustrare quanto detto, il nostro sistema $\begin{cases} 5x+3y+z=14 \\ 2y-z=1 \\ 5x+y+2z=13 \end{cases}$

per il quale era $n=3,\ r=2$.
Bene! Fra le 3 equazioni, ne potremo dunque prendere 2 tali che sia uguale a 2 il rango
della matrice dei coefficienti delle incognite nel sotto-sistema da esse formato;
ad esempio, estrarremo dal sistema proposto il seguente:

$$\begin{cases} 5x+3y+z=14 \\ 2y-z=1 \end{cases}$$

Ora in questo sistema considereremo 2 incognite tali che
il determinante dei loro coefficienti sia diverso da 0, per esempio *y* e *z*;
e le terremo a primo membro considerandole come le "vere" incognite,
mentre porteremo *x* a secondo membro quasi fosse una costante arbitraria:

$$\begin{cases} 3y+z=14-5x \\ 2y-z=1 \end{cases}$$

Risolveremo quindi rispetto a $y,\ z$ in un modo qualunque
(magari con Cramer, o con riduzione che nella fattispecie è particolarmente comoda)
ottenendo infine

$$\begin{cases} y=3-x \\ z=5-2x \end{cases}$$

Nell'esempio fatto il numero delle equazioni coincideva con quello delle incognite,
però, lo ribadiamo, il discorso vale anche qualora ciò non avvenga

ESERCIZI

1) Determina il rango delle matrici seguenti:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

2) I sistemi lineari che seguono hanno tante equazioni quante incognite.
Per ciascuno di essi, devi stabilire se è: impossibile, determinato o indeterminato.
Indicazione: stabilisci innanzitutto se è determinato, il che avviene qualora il determinante dei coefficienti delle incognite sia diverso da 0; nel caso tale determinante risulti invece uguale a 0, individua i ranghi delle due matrici completa e incompleta e applica il Teorema di Rouché-Capelli

a) $\begin{cases} x-y=5 \\ x-z=7 \\ y-z=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+z=0 \\ x+y-z=0 \\ x+z-t=0 \\ y-2z+t=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3y+z=11 \\ 3x+4y=13 \\ 4x+5y-z=15 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y=1 \\ x+2z=14 \\ y+3z=12 \end{cases}$ e) $\begin{cases} -9x+15y=20 \\ 3x-5y=18 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 6x-15y=0 \\ 4x-10y=0 \end{cases}$

3) Per ciascuno dei seguenti sistemi:
I) stabilisci se è compatibile e, in caso affermativo, se è determinato oppure indeterminato
II) trova, nel caso sia compatibile, le soluzioni

a) $\begin{cases} 4x+3y=22 \\ x-y=2 \\ 2x+5y=25 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x+y-z=20 \\ 8x-y-3z=32 \\ 2x-y-z=6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+3y=7 \\ x-3y=13 \\ 3x-y=31 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 10x-6y=8 \\ 5x-3y=4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+y-z-t-w=1 \\ x-y-z-t+w=-1 \\ x-y+z+t-w=1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x-y+2z=-6 \\ x+y=2 \\ y-z=4 \\ 3x+2y+z=2 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x-y+z+t=0 \\ x+y-2z-t=1 \\ 2x-3z-t=0 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 3x-4y=1 \\ y+2z=8 \\ 3x-y+6z=10 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x-y+z=24 \\ -x-y+z=14 \end{cases}$ l) $\begin{cases} x-y=3 \\ x+2y=15 \\ 4x-y=20 \\ 3x+y=25 \end{cases}$ m) $\begin{cases} 5x-z=3 \\ x-y+z=4 \\ x+y-z=-2 \\ 2x-3y+2z=9 \\ x+4y+z=-1 \end{cases}$ n) $\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ 3x-4y+3z=1 \\ x-3y+2z=-2 \\ x+2y-z=5 \end{cases}$

RISPOSTE

1) a) 2 b) 1 c) 3 d) 2 e) 1 f) 2 2) a) indet. b) imposs. c) indet. d) det. e) imposs. f) indet.

3) a) imposs. b) indet.; ad esempio, $\begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y=7-x \\ z=3x-13 \end{cases}$ c) det.: $\begin{cases} x=10 \\ y=-1 \end{cases}$ d) indet. $\begin{cases} x=\dfrac{3y+4}{5} \\ y \text{ qualsiasi} \end{cases}$ opp. $\begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y=\dfrac{5x-4}{3} \end{cases}$

e) indet.: ad es., $\begin{cases} x=z+t \\ y=z+t \\ z \text{ qualsiasi} \\ t \text{ qualsiasi} \\ w=z+t-1 \end{cases}$ f) indet.: ad es., $\begin{cases} x=-z-2 \\ y=z+4 \\ z \text{ qualsiasi} \end{cases}$ g) indet.: ad es., $\begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y=2-x \\ z=2x-1 \\ t=3-4x \end{cases}$ h) imposs.

i) indet.: $\begin{cases} x=5 \\ y \text{ qualsiasi} \\ z=y+19 \end{cases}$ oppure … l) imposs. m) det.: $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=2 \end{cases}$ n) indet.: $\begin{cases} x=\dfrac{11-z}{5} \\ y=\dfrac{7+3z}{5} \\ z \text{ qualsiasi} \end{cases}$ oppure …

5. PRODOTTO DI DUE MATRICI (purché siano (m, n) e (n, p))

Ha senso eseguire il prodotto di due matrici solo quando
il numero delle colonne della prima coincide col numero delle righe della seconda,
ossia quando, dette A e B rispettivamente la prima e la seconda matrice
che intervengono nella moltiplicazione, è
$A(m, n)$ e $B(n, p)$.

In questo caso il prodotto delle matrici considerate si fa "riga per colonna", ossia il termine che sta sulla *i*-esima riga e sulla *k*-esima colonna della matrice prodotto, la quale sarà una matrice $(m,\ p)$, si ottiene prendendo

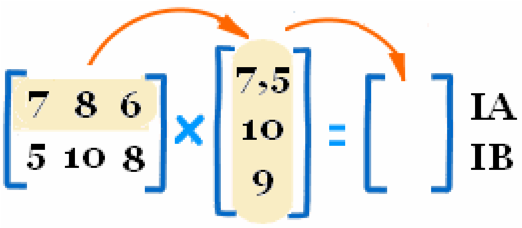
- l' *i*-esima riga della prima matrice
- e la *k*-esima colonna della seconda matrice,

e moltiplicandole nel modo illustrato dall'esempio che segue:

Il prodotto di due matrici, anche quando è effettuabile in entrambi i versi, non è commutativo: in generale, $A \cdot B \neq B \cdot A$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 154 \end{pmatrix} \quad dove: \begin{array}{cc} 58 = 1\cdot 7 + 2\cdot 9 + 3\cdot 11 & 64 = 1\cdot 8 + 2\cdot 10 + 3\cdot 12 \\ \textit{1a riga} \times \textit{1a colonna} & \textit{1a riga} \times \textit{2a colonna} \\ 139 = 4\cdot 7 + 5\cdot 9 + 6\cdot 11 & 154 = 4\cdot 8 + 5\cdot 10 + 6\cdot 12 \\ \textit{2a riga} \times \textit{1a colonna} & \textit{2a riga} \times \textit{2a colonna} \end{array}$$

In gita a Londra, la classe I A ha ordinato in un pub 7 "bangers and mash", 8 "fish and chips" e 6 cottage pies; la I B, 5 "bangers and mash", 10 "fish and chips" e 8 cottage pies. Un piatto di "bangers and mash" costa 7,5 sterline, 10 un "fish and chips" e 9 un cottage pie. Calcola la spesa di ciascuna delle due classi attraverso il prodotto delle due matrici qui a fianco.



6. L'INVERSA DI UNA MATRICE (purché sia QUADRATA)

Una matrice *quadrata* A si dice "invertibile" se esiste un'altra matrice A^{-1}
(con lo stesso numero di righe e colonne di A)
tale che $A^{-1} \cdot A = I$, dove I è la matrice "identica" con lo stesso numero di righe e di colonne di A.
Una matrice quadrata è "identica" quando gli elementi della sua diagonale discendente (la diagonale "principale") sono tutti uguali a 1, e gli elementi restanti tutti uguali a 0.

Ad esempio, presa la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, la sua inversa è $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

in quanto risulta $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc} 1 = -2\cdot 1 + 1\cdot 3 & 0 = -2\cdot 2 + 1\cdot 4 \\ \textit{1a riga} \times \textit{1a colonna} & \textit{1a riga} \times \textit{2a colonna} \\ 0 = 3/2\cdot 1 + (-1/2)\cdot 3 & 1 = 3/2\cdot 2 + (-1/2)\cdot 4 \\ \textit{2a riga} \times \textit{1a colonna} & \textit{2a riga} \times \textit{2a colonna} \end{array}$$

Per essere invertibile, una matrice quadrata A deve avere il determinante $\neq 0$.
In questo caso, la matrice inversa si otterrà con la procedura seguente:
I) si scambiano le righe con le colonne (*);
II) si sostituisce ciascun termine della nuova matrice ottenuta con il suo "complemento algebrico $\rightarrow$;
III) si divide ciascun termine dell'ultima matrice per det(A).

In una matrice, il "complemento algebrico" di un termine $a_{i,k}$ è il numero $A_{i,k}$ ottenibile prendendo il determinante che rimane se si cancellano la riga e la colonna su cui sta il termine in questione, e moltiplicandone il valore per $+1$ o -1 a seconda che $i+k$ sia pari o sia dispari.

(*) La matrice così ottenuta è detta la "trasposta" A^T della matrice A data

❑ Esempio: invertire la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calcolo il determinante, anche per controllare che sia diverso da zero: $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8$, poi:

I) scambio le righe con le colonne: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

II) sostituisco ogni termine col suo "complemento algebrico": $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -8 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

III) e dividendo ogni termine per det(A), ottengo finalmente la matrice inversa: $\begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & -1 \\ -1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Puoi verificare tu che moltiplicandola per $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ si ottiene $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (matrice identica di ordine 3).

7. ALTRE OPERAZIONI CON MATRICI: SOMMA, PRODOTTO PER UNO SCALARE

La SOMMA DI MATRICI
è quella semplice operazione la quale, a partire da due matrici entrambe $m \times n$, ne genera un'altra, ancora $m \times n$, nella quale ogni elemento è la somma dei due elementi aventi ugual posto, nelle matrici date, come nell'esempio seguente: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

UNA MATRICE SI PUÒ ANCHE MOLTIPLICARE PER UN NUMERO REALE (= per uno "scalare").
Il risultato sarà una matrice con lo stesso numero di righe e colonne di quella di partenza, e con gli elementi ottenuti moltiplicando per quello scalare gli elementi della matrice iniziale: $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$

Lo specchietto sottostante riassume le principali PROPRIETÀ delle operazioni con matrici
(il puntino di moltiplicazione è sempre omesso):

Se A, B, C sono matrici $m \times n$, allora $\quad A + B = B + A$; $\quad (A + B) + C = A + (B + C)$
Se $A(m \times n), B(n \times p), C(p \times q)$, allora $\quad (AB)C = A(BC)$
Se $A(m \times n), B(m \times n), C(n \times p), D(q \times m)$, allora $\quad (A + B)C = AC + BC$, $D(A + B) = DA + DB$
Se $A(m \times n), B(n \times p), C(m \times n), r, s \in \mathbb{R}$, allora $\quad r(sA) = (rs)A = s(rA)$; $A(rB) = r(AB)$; $(r + s)A = rA + sA$; $r(A + C) = rA + rC$

ESERCIZI

1) Sia $A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Determina la matrice $A \cdot B$. E riguardo alla $B \cdot A$?

2) Sia $A\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$. Determina:
$A \cdot B$, $B \cdot A$, $A \cdot A = A^2$, $3A + 2B$, A^{-1}

3) Sia $A\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Determina le matrici: $A \cdot B$; $B \cdot A$; $A \cdot C$; $B \cdot C$; $2A - B = 2A + (-1)B$; A^{-1}

4) Sia $A\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. a) Verifica che $(AB)C = A(BC)$. b) Si ha $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$?
c) Risulta $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$? d) E' $(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$?

5) Con le matrici, non vale la "legge di annullamento del prodotto": può avvenire che due matrici non abbiano, nessuna delle due, i termini tutti nulli, e che tuttavia la loro matrice prodotto sia la "matrice nulla", coi termini tutti uguali a 0. Sapresti inventare un esempio di questo tipo?

6) Con le matrici, non vale la "legge di cancellazione" $xz = yz \to x = y \ (z \neq 0)$:
verifica ad esempio che è $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, nonostante sia $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

7) $V_1(2,\ 4,\ -3)$ è un "vettore riga", $V_2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ è un "vettore colonna" (matrici con una sola linea).
a) Determina i due prodotti $V_1 \cdot V_2$ e $V_2 \cdot V_1$
b) Se V_1 avesse avuto una 4^a componente, i prodotti $V_1 \cdot V_2$, $V_2 \cdot V_1$ sarebbero stati entrambi eseguibili?

RISPOSTE

1) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & -5 \\ 4 & -4 & -9 & 10 \\ -1 & 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$; la matrice $B \cdot A$ invece non esiste, perché le colonne di B non sono tante quante le righe di A.

2) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 10 \\ 8 & -22 & -6 \\ 4 & -11 & -4 \end{pmatrix}$; $B \cdot A = \begin{pmatrix} -20 & 7 & -9 \\ 8 & -1 & 3 \\ -12 & 1 & -5 \end{pmatrix}$; $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 5 & -8 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$; $3A + 2B = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -6 \\ 12 & -1 & 7 \\ 6 & -2 & -5 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/3 & -2/3 & 4/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

3) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ 35 & -15 \end{pmatrix}$; $B \cdot A = \begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 49 & 4 \end{pmatrix}$; $A \cdot C = \begin{pmatrix} 16 & -5 & 1 \\ 6 & 3 & -11 \end{pmatrix}$; $B \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 7 & -8 & 14 \end{pmatrix}$; $2A - B = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -14 & 11 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/13 & -1/13 \\ 3/26 & 5/26 \end{pmatrix}$

4) a) $(AB)C = A(BC) = \begin{pmatrix} -11 & -13 \\ 13 & 19 \end{pmatrix}$ b) Sì c) No: $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ d) No: $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è un esempio 7) a) $V_1 \cdot V_2 = (-15)$; $V_2 \cdot V_1 = \begin{pmatrix} -4 & -8 & 6 \\ 2 & 4 & -3 \\ 10 & 20 & -15 \end{pmatrix}$ b) $V_1 \cdot V_2$ no, $V_2 \cdot V_1$ sì

8. MATRICI E AFFINITA'

Ci si può servire delle matrici anche per eseguire con molta efficacia e rapidità calcoli inerenti alle affinità; o per affidare questi calcoli a un programma per computer.
Innanzitutto, osserviamo che **un'affinità**
(ricordiamo: una **trasformazione piana che muta rette in rette, conservando l'ordine dei punti allineati**)
è associata a un sistema di equazioni lineari, della forma

$$\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases}$$

quindi, **sostanzialmente, è individuata dalla matrice** (2×3) **dei coefficienti che compaiono nel sistema**:

$$\begin{pmatrix} a & b & m \\ c & d & n \end{pmatrix}$$

Il seguente specchietto ricorda le affinità più rilevanti da noi studiate:

Simmetria rispetto	all'origine	$s_0: \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$	Simmetria rispetto	a un punto $P_0(x_0, y_0)$	$s_{P_0}: \begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases}$
Simmetria rispetto	all'asse x	$s_{asse\,x}: \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$	Simmetria rispetto	all'asse y	$s_{asse\,y}: \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$
Simmetria rispetto a una parallela all'asse x		$s_{y=y_0}: \begin{cases} x' = x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases}$	Simmetria rispetto a una parallela all'asse y		$s_{x=x_0}: \begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = y \end{cases}$
Simmetria rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante		$s_{y=x}: \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$	Traslazione di vettore $\vec{\mathbf{v}}(a, b)$		$\tau_{\vec{\mathbf{v}}}: \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$
Omotetia di centro l'origine e rapporto $k \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$		$\omega_{O,k}: \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$	Omotetia di centro $C(x_C, y_C)$ e rapporto $k \in \mathbb{R}^*$		$\omega_{C,k}: \begin{cases} x' = kx + a \\ y' = ky + b \end{cases}$
Dilatazione di centro l'origine e rapporti h (orizzontale), k (verticale):		$d_{O,h,k}: \begin{cases} x' = hx \\ y' = ky \end{cases}$	Trasformazione "identica", quella che lascia tutto fermo:		$i: \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

QUANDO I TERMINI NOTI NON CI SONO

Tra le affinità sopra considerate,
alcune sono tali che le loro equazioni *non contengono* i "termini noti" *m*, *n*.

Affinità siffatte sono individuate da matrici (2×2): $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$;

prenderemo in esame dapprima i casi di questo tipo, perché per le affinità individuate da matrici (2×3) il discorso è un po' più complicato e lo affronteremo in una seconda fase.

Bene: vedremo ora che, nel caso delle affinità "senza termini noti", ossia associate a matrici (2×2),

A) la composizione (= "prodotto") di due affinità si riconduce al prodotto delle corrispondenti matrici
B) l' inversa di un'affinità si riconduce all'inversa della matrice corrispondente

A) LA COMPOSIZIONE (= "PRODOTTO") DI DUE AFFINITÀ SENZA TERMINI NOTI (QUINDI, ASSOCIATE A MATRICI (2×2)) SI RICONDUCE AL PRODOTTO DELLE CORRISPONDENTI MATRICI.

Sia ad esempio $f: \begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -y \end{cases}$; $g: \begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = 3x + y \end{cases}$

Avremo la possibilità di determinare le equazioni della trasformazione composta $f \circ g$ moltiplicando le due corrispondenti matrici $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Si ottiene $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

$\underbrace{7 = 1\cdot 1 + 2\cdot 3}_{1a\ riga\ \times\ 1a\ colonna}$ $\quad \underbrace{0 = 1\cdot(-2) + 2\cdot 1}_{1a\ riga\ \times\ 2a\ colonna}$

$\underbrace{-3 = 0\cdot 1 - 1\cdot 3}_{2a\ riga\ \times\ 1a\ colonna}$ $\quad \underbrace{-1 = 0\cdot(-2) - 1\cdot 1}_{2a\ riga\ \times\ 2a\ colonna}$

e se ne conclude che $f \circ g: \begin{cases} x' = 7x \\ y' = -3x - y \end{cases}$

Controlliamo, eseguendo la composizione col metodo "tradizionale", senza matrici:

$$f:\begin{cases}x'=x+2y\\ y'=-y\end{cases};\ g:\begin{cases}x'=x-2y\\ y'=3x+y\end{cases}\ \rightarrow\ f\circ g:\begin{cases}x'=(x-2y)+2(3x+y)=x-2y+6x+2y=7x\\ y'=-(3x+y)=-3x-y\end{cases}\quad OK!!!$$

Proviamo ora ad eseguire, attraverso il prodotto di matrici, la composizione in ordine scambiato $g\circ f$:

avremo $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 5\end{pmatrix}$

$\underset{1a\ riga\times 1a\ colonna}{1=1\cdot 1-2\cdot 0}$ $\quad\underset{1a\ riga\times 2a\ colonna}{4=1\cdot 2-2\cdot(-1)}$

$\underset{2a\ riga\times 1a\ colonna}{3=3\cdot 1+1\cdot 0}$ $\quad\underset{2a\ riga\times 2a\ colonna}{5=3\cdot 2+1\cdot(-1)}$

da cui $g\circ f:\begin{cases}x'=x+4y\\ y'=3x+5y\end{cases}$

Osserva che $f\circ g\neq g\circ f$: la composizione di funzioni, e il prodotto di matrici, non sono operazioni commutative.

B) **L'INVERSIONE DI UNA AFFINITÀ SENZA TERMINI NOTI (QUINDI, ASSOCIATA A UNA MATRICE (2×2)) SI RICONDUCE ALL'INVERSIONE DELLA CORRISPONDENTE MATRICE.**

Sia ad esempio $f:\begin{cases}x'=2x+y\\ y'=2x-y\end{cases}$

Per invertirla, considero la matrice $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ e innanzitutto ne calcolo il determinante: $\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-4\neq 0$.

Ora scambio le righe con le colonne: $\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

sostituisco ogni termine col suo complemento algebrico $\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$

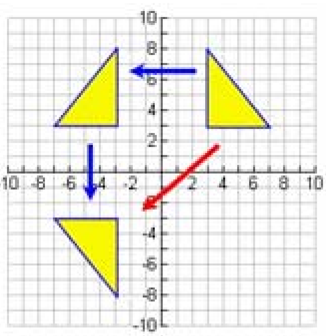
e divido ogni termine per il determinante (che valeva -4) ottenendo: $\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

L'affinità inversa è quindi $f^{-1}:\begin{cases}x'=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}y\\ y'=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y\end{cases}$. Verifica tu che effettivamente è $f^{-1}\circ f=i$. $\left[i:\begin{cases}x'=x\\ y'=y\end{cases}\right]$

Eseguendo l'inversione col metodo "tradizionale", senza matrici, avremmo avuto:

$$f:\begin{cases}x'=2x+y\\ y'=2x-y\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x'+y'=4x\\ x'-y'=2y\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{x'+y'}{4}=\dfrac{1}{4}x'+\dfrac{1}{4}y'\\ y=\dfrac{x'-y'}{2}=\dfrac{1}{2}x'-\dfrac{1}{2}y'\end{cases}\xrightarrow{(x',y')\leftrightarrow(x,y)}\begin{cases}x'=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{4}y\\ y'=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}y\end{cases}\quad OK!!!$$

ESERCIZI - Determina $f\circ g$, $g\circ f$, f^{-1}, g^{-1} utilizzando le matrici, *poi* controlla il risultato componendo e invertendo *senza* le matrici.



1) $f:\begin{cases}x'=y\\ y'=x+y\end{cases}$ $\quad g:\begin{cases}x'=2x+3y\\ y'=3x+4y\end{cases}$

2) $f:\begin{cases}x'=2x+y\\ y'=x+y\end{cases}$ $\quad g:\begin{cases}x'=-y\\ y'=-2x\end{cases}$

3) $f:\begin{cases}x'=5x-3y\\ y'=-x+y\end{cases}$ $\quad g:\begin{cases}x'=2x+2y\\ y'=x+3y\end{cases}$

4) $f:\begin{cases}x'=-x\\ y'=-y\end{cases}$ $\quad g:\begin{cases}x'=x-y\\ y'=-x\end{cases}$

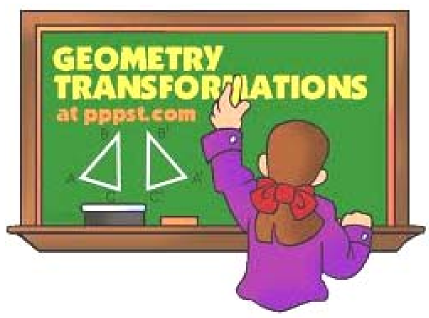


Figura da www.regentsprep.org

Figura da http://math.pppst.com

RISPOSTE 1) $f\circ g:\begin{cases}x'=3x+4y\\ y'=5x+7y\end{cases}$ $\quad g\circ f:\begin{cases}x'=3x+5y\\ y'=4x+7y\end{cases}$ $\quad f^{-1}:\begin{cases}x'=-x+y\\ y'=x\end{cases}$ $\quad g^{-1}:\begin{cases}x'=-4x+3y\\ y'=3x-2y\end{cases}$

2, 3, 4) A te la verifica, eseguendo la procedura nei due modi e, per la funzione inversa, controllando anche che si abbia $f^{-1}\circ f=i$ (matrice identica di ordine 2)

QUANDO CI SONO ANCHE I TERMINI NOTI

E se lasciassimo ora cadere l'ipotesi che le equazioni dell'affinità non contengano i "termini noti" m, n? Allora queste equazioni sarebbero della forma

$\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases}$ con $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ (altrimenti, come sappiamo, la corrispondenza non sarebbe biunivoca quindi non si tratterebbe di un'affinità)

Ci domandiamo: sarebbe ancora possibile ridurre la composizione di due affinità e l'inversione di un'affinità ad operazioni effettuate sulle matrici?
Ci occuperemo della sola composizione.
La risposta è affermativa, ma occorre fissare con cura l'assetto "formale" della questione.

Prima di tutto, per indicare le tre coppie: I) x, y II) x', y' III) m, n

ci serviremo di altrettanti **vettori colonna**: $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $\mathrm{U}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$; $\mathrm{K} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$

Questo perché, indicando con A la matrice dei quattro coefficienti di x, y: $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, potremo scrivere

$\mathrm{U}' = \mathrm{A} \cdot \mathrm{U} + \mathrm{K}$ (controlla che è proprio così!).

Allora, per quanto riguarda la composizione di due affinità

$f: \begin{cases} x' = a_1x + b_1y + m_1 \\ y' = c_1x + d_1y + n_1 \end{cases}$ $\quad g: \begin{cases} x' = a_2x + b_2y + m_2 \\ y' = c_2x + d_2y + n_2 \end{cases}$,

avremo:

f: $\mathrm{U}' = \mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{U} + \mathrm{K}_1$ con $\mathrm{A}_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{K}_1 = \begin{pmatrix} m_1 \\ n_1 \end{pmatrix}$

g: $\mathrm{U}' = \mathrm{A}_2 \cdot \mathrm{U} + \mathrm{K}_2$ con $\mathrm{A}_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{K}_2 = \begin{pmatrix} m_2 \\ n_2 \end{pmatrix}$

e sarà

$f \circ g: \mathrm{U}' = \mathrm{A}_1 \cdot (\mathrm{A}_2 \cdot \mathrm{U} + \mathrm{K}_2) + \mathrm{K}_1 = \mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{A}_2 \cdot \mathrm{U} + \mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{K}_2 + \mathrm{K}_1$
$g \circ f: \mathrm{U}' = \mathrm{A}_2 \cdot (\mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{U} + \mathrm{K}_1) + \mathrm{K}_2 = \mathrm{A}_2 \cdot \mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{U} + \mathrm{A}_2 \cdot \mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_2$

dove i passaggi sono giustificati dalle proprietà delle operazioni con matrici che trovi elencate a pag. 321

Ad esempio, se fosse $f: \begin{cases} x' = x + y + 3 \\ y' = 5x - 2y + 4 \end{cases}$, $\quad g: \begin{cases} x' = -y \\ y' = -x + y + 1 \end{cases}$,

si avrebbe $\mathrm{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{K}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{K}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

e la $f \circ g: \mathrm{U}' = \mathrm{A}_1 \cdot (\mathrm{A}_2 \cdot \mathrm{U} + \mathrm{K}_2) + \mathrm{K}_1 = \mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{A}_2 \cdot \mathrm{U} + \mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{K}_2 + \mathrm{K}_1$

diventerebbe $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 2x - 7y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 4 \\ 2x - 7y + 2 \end{pmatrix}$$

In definitiva, la trasformazione composta risulterebbe essere la $f \circ g: \begin{cases} x' = -x + 4 \\ y' = 2x - 7y + 2 \end{cases}$.

Verifichiamo che alla stessa trasformazione composta si perverrebbe anche senza l'utilizzo di matrici:

$f: \begin{cases} x' = x + y + 3 \\ y' = 5x - 2y + 4 \end{cases}$ $\quad g: \begin{cases} x' = -y \\ y' = -x + y + 1 \end{cases}$ $\quad f \circ g: \begin{cases} x' = -y + (-x + y + 1) + 3 = -x + 4 \\ y' = 5(-y) - 2(-x + y + 1) + 4 = \ldots = 2x - 7y + 2 \end{cases}$

Per esercizio, ricava tu ora attraverso le matrici la trasformazione $g \circ f$; troverai $g \circ f: \begin{cases} x' = -5x + 2y - 4 \\ y' = 4x - 3y + 2 \end{cases}$

ESERCIZI - Determina $f \circ g$ e $g \circ f$ con e senza l'uso di matrici:

1) $f: \begin{cases} x' = 2x + y + 3 \\ y' = x + 2y \end{cases}$, $g: \begin{cases} x' = -x - 1 \\ y' = 4x - y \end{cases}$ $\quad$ 2) $f: \begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y + 1 \end{cases}$, $g: \begin{cases} x' = y \\ y' = 2x - y - 2 \end{cases}$

RISPOSTE 1) $f \circ g: \begin{cases} x' = 2x - y + 1 \\ y' = 7x - 2y - 1 \end{cases}$ Per $g \circ f$ e per 2): ovviamente eseguendo nei due modi il risultato dev'essere lo stesso