CENNI DI GEOMETRIA SOLIDA

Così come la geometria piana, anche la solida è stata organizzata dai matematici secondo una struttura "ipotetico-deduttiva": definizioni, assiomi, teoremi.

Noi qui ci proponiamo di darne una presentazione snella, che attiri l'attenzione sugli aspetti accattivanti di questo splendido argomento, quindi cercheremo un compromesso fra il rigore e la semplicità/brevità, rinunciando deliberatamente a un'esposizione esaustiva, troppo ingombrante per i nostri scopi.

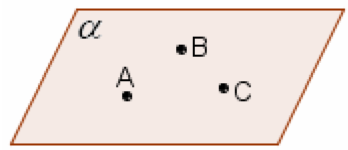
Iniziamo.

1. NOZIONI GENERALI

Un "piano" è un'entità geometrica indicata con una lettera greca e caratterizzata da una famiglia di assiomi: eccone qui di seguito due.

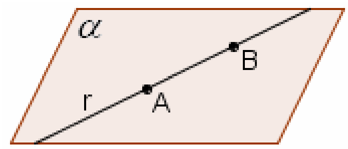
Assioma: **per 3 punti distinti, non allineati, passa un piano e uno solo**
(conseguenza: due rette incidenti individuano uno e un solo piano).

Per questo motivo, **un piano si può indicare anche tramite una terna di suoi punti non allineati: piano α o piano ABC.**

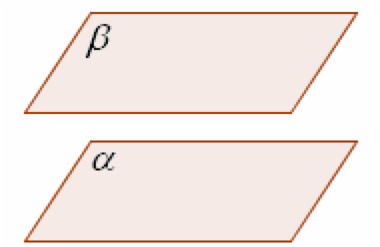


Assioma: **se due punti di una retta giacciono su di un piano, anche tutti gli altri punti della retta appartengono a quel piano**

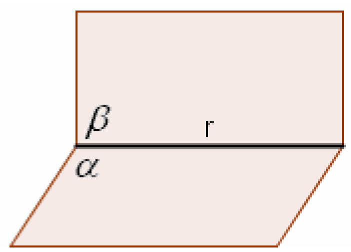
Quindi **il piano è illimitato in tutte le direzioni**: i nostri disegni, per cercare di comunicare l'idea di tridimensionalità nell'ambito bidimensionale del foglio, devono occultare questa caratteristica, che comunque va sempre tenuta presente.



Piani paralleli: non hanno nessun punto in comune, oppure coincidono

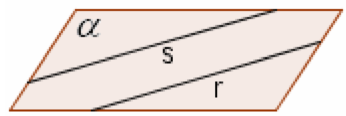


Piani incidenti: non sono paralleli; si può dimostrare che l'insieme dei loro punti comuni è una retta.



Rette sghembe nello spazio: non appartengono al medesimo piano, e non hanno punti comuni.

Rette parallele nello spazio: appartengono al medesimo piano, e non hanno punti comuni, oppure ne hanno infiniti (coincidono).



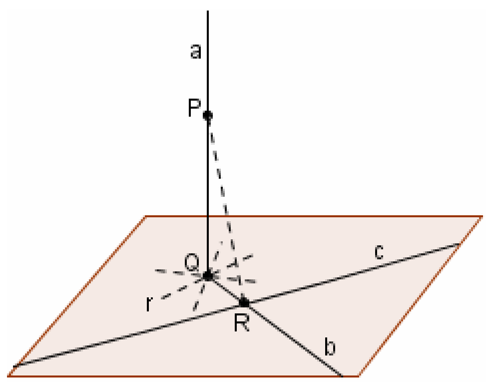
Definizione di perpendicolarità retta-piano:

una retta si dice perpendicolare ad un piano se e solo se è perpendicolare a tutte le rette di quel piano, passanti per il punto in cui la retta e il piano si tagliano
(ciò avviene senz'altro, come si può dimostrare, ogniqualvolta sia noto che è perpendicolare ad *almeno due* di quelle rette).

(NOTA: quando pensiamo, ad esempio, alla perpendicolarità fra la retta **a** e la retta **r** della figura, la pensiamo nell'ambito di *quel* piano che è individuato dalle due rette in questione **a, r**)

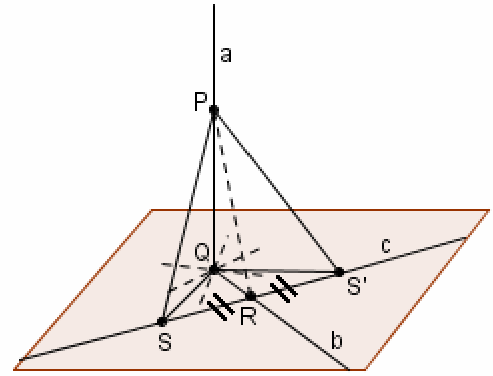
TEOREMA DELLE TRE PERPENDICOLARI
(è sovente utilizzato per giustificare una perpendicolarità in un contesto tridimensionale):

se si conduce una perpendicolare *a* ad un piano, e dal piede Q di questa si traccia la perpendicolare *b* ad una terza retta *c* che giace sul piano, l'ultima retta menzionata (*c*) risulta perpendicolare al piano individuato dalle prime due ($c \perp$ PQR)



Il Teorema delle Tre Perpendicolari

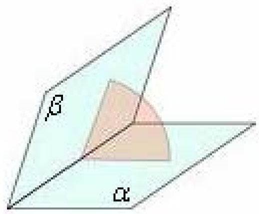
Dimostrazione del Teorema



Sulla retta c, da parti opposte rispetto a R, prendiamo due punti S ed S', equidistanti da R: $RS = RS'$. Congiungiamo sia Q che P con S e con S'.
E' $QS = QS'$ perché i due triangoli QRS, QRS' sono uguali per il 1° Criterio; ma allora anche i due triangoli PQS, PQS' sono uguali per il 1° Criterio, e di conseguenza è $PS = PS'$.
Il triangolo PSS' è dunque isoscele, e pertanto PR, mediana relativa alla base, fa anche da altezza: è perciò

$$P\widehat{R}S = P\widehat{R}S' = 90°$$

e allora la retta c è perpendicolare nel punto R alla retta PR; ma la retta c era già, nello stesso punto R, appendicolare anche alla retta b; e quindi c, essendo perpendicolare, nel punto R, a due rette del piano PQR, è perpendicolare a tale piano, come volevasi dimostrare.

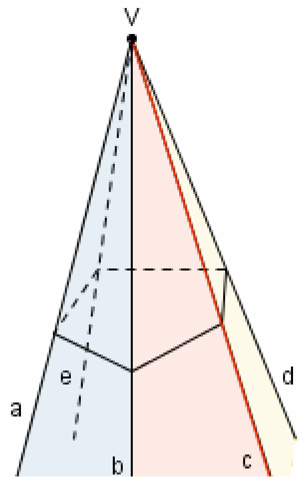


Un angolo fra due piani,
o "**angolo diedro**",
o semplicemente "**DIEDRO**"

(*immagine opera di Luca Antonelli, da Wikimedia Commons, qui utilizzata con licenza GFDL, GNU Free Documentation License*)

Qui a destra, una figura che va pensata estesa illimitatamente verso il basso, detta "**ANGOLOIDE**".

La somma delle ampiezze delle facce di un angoloide (in questo caso abbiamo 5 facce) è sempre <360°.



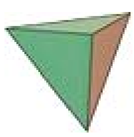
Un "**POLIEDRO**" è un solido delimitato da facce di forma poligonale.

Un poliedro si dice "**regolare**" o "**platonico**" quando le sue facce sono *poligoni regolari, tutti uguali fra loro*.

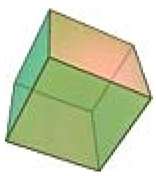
Si dimostra che esistono solo 5 tipi di POLIEDRI REGOLARI:

- il tetraedro regolare,
- l'esaedro regolare o cubo,
- l'ottaedro regolare,
- l'icosaedro regolare,
- il pentadodecaedro regolare.

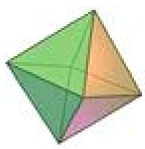
Le immagini sottostanti hanno come autore Cyp (*GFDL* , *Creative Commons Attribution Non-Commercial Share-Alike license version 2.0*)



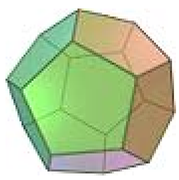
Tetraedro regolare (4 facce triangolari equilatere, 4 vertici, 6 spigoli)



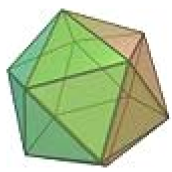
Cubo (6 facce quadrate, 8 vertici, 12 spigoli)



Ottaedro regolare (8 facce triangolari equilatere, 6 vertici, 12 spigoli)



Pentadodecaedro regolare (12 facce pentagonali regolari, 20 vertici, 30 spigoli)



Icosaedro regolare (20 facce triangolari equilatere, 12 vertici, 30 spigoli)

Per *tutti* i poliedri, regolari e non regolari, purché siano "*convessi*" (= senza "rientranze"), vale la rilevante

FORMULA DI EULERO:

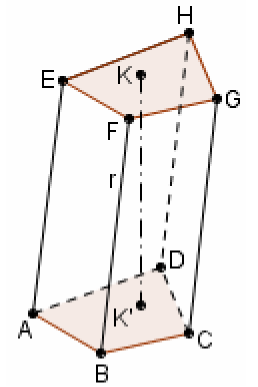
f+v = s+2

" il numero delle facce più quello dei vertici è uguale al numero degli spigoli, più 2 "

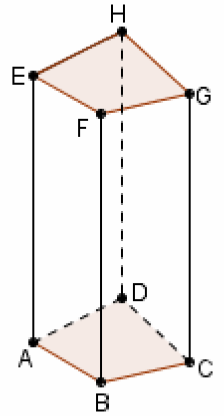
Un “**PRISMA**” è un solido delimitato da
due “basi” poligonali uguali e parallele fra loro (= giacenti su piani fra loro paralleli)
e da una superficie laterale costituita da parallelogrammi (da rettangoli, se il prisma è “retto”).
Si dice “**altezza**” **di un prisma**, la **distanza** (= segmento di perpendicolare) **fra i piani delle due basi**.

- **Prisma “retto”**: gli spigoli laterali sono perpendicolari ai piani delle basi.
- **Prisma “regolare”**: prisma retto, la cui base è un poligono regolare.
- **Parallelepipedo**: prisma le cui 6 facce sono parallelogrammi (a 2 a 2 uguali, e giacenti su piani paralleli)
- **Parallelepipedo rettangolo**: le facce sono 6 rettangoli (è la tipica forma di una “scatola”).

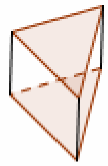
Un **prisma non retto** e una sua altezza KK'



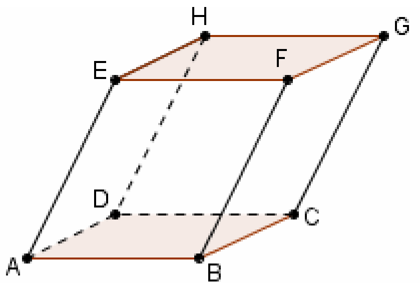
Un **prisma retto**; EA = FB = GC = HD ne sono altezze



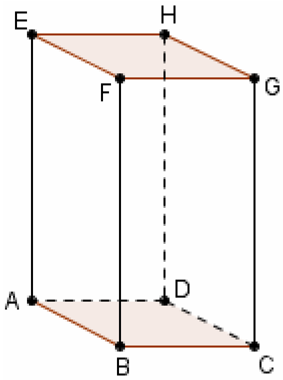
Qui a fianco, un **prisma regolare** avente per base un triangolo equilatero



Un **parallelepipedo generico**

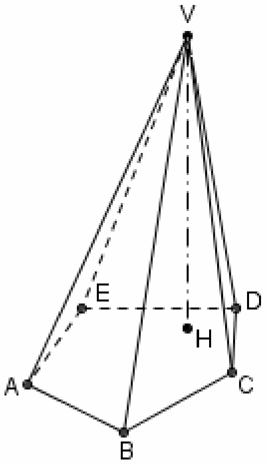


Un **parallelepipedo rettangolo**

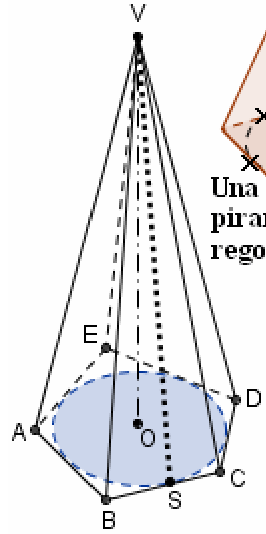


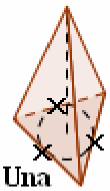
Una “**PIRAMIDE**” è un solido delimitato da una “base” poligonale e da una superficie laterale
formata da triangoli, ottenuti congiungendo un punto V (“vertice”) coi vertici della base.
Si dice “**altezza**” **di una piramide**, la **distanza fra il vertice e il piano della base**.

- **Piramide "retta"**: la sua base è un poligono *circoscrivibile ad una circonferenza*,
  e inoltre l'altezza della piramide ha il suo piede *proprio nel centro* di questa circonferenza
- In una *piramide retta*, le altezze dei triangoli che formano la superficie laterale sono *tutte uguali* fra loro:
  una qualsiasi di queste altezze uguali si dice “**apotema**” della piramide.
  Ribadiamolo: il concetto di “*apotema*” di una piramide
  NON ha senso per una piramide *qualsiasi*, ma solo per una piramide *retta*.
- **Piramide “regolare”**: è una piramide retta, avente per base un poligono regolare
- **Tronco di piramide**: si ottiene intersecando una piramide con un piano parallelo alla base



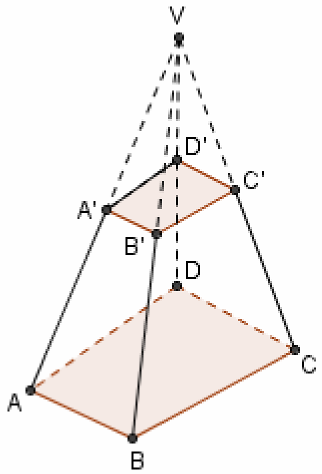
Una **piramide generica** con la sua altezza VH



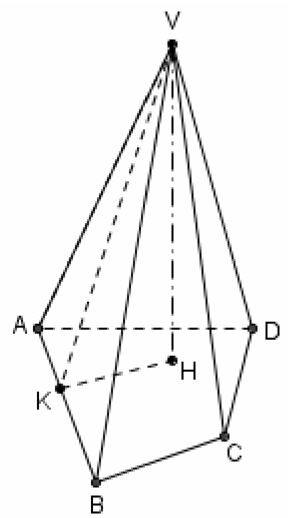


Una piramide regolare

Una **piramide retta**; VS è uno dei suoi apotemi.



Un **tronco di piramide** (è come se fosse la differenza di due piramidi!)



Delle 5 figure, quella più a destra si riferisce al seguente enunciato: “*In una piramide qualsiasi (anche non retta), detti V il vertice, AB un lato della base, H la proiezione di V sul piano della base, e K la proiezione di H su AB, si ha che VK è l'altezza del triangolo VAB* ”. Dài, che qualcosa di già visto ti consente di dimostrarlo!