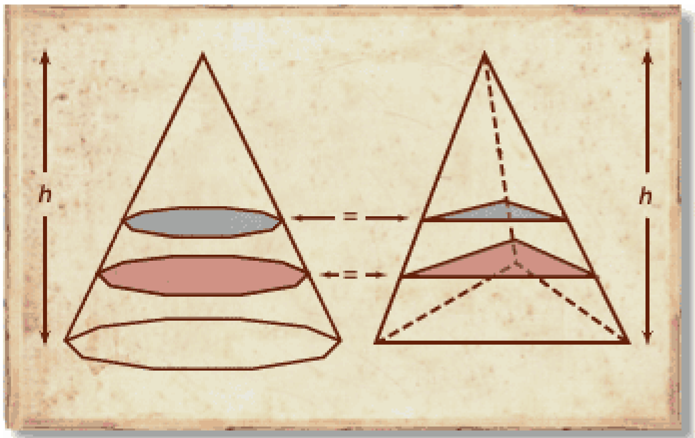
4. IL PRINCIPIO DI CAVALIERI E LA SUA APPLICAZIONE AL CALCOLO DEI VOLUMI DI PRISMI, CILINDRI, PIRAMIDI E CONI

ASSIOMA: il "PRINCIPIO DI CAVALIERI" (Bonaventura Cavalieri, 1598-1647)

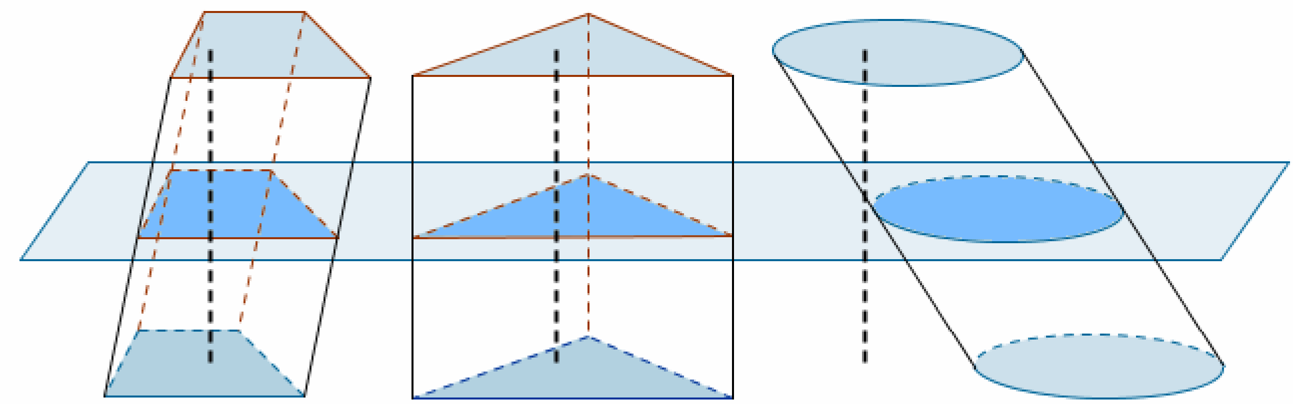
" Se due solidi possono essere disposti in modo tale che, sezionandoli con un fascio di piani paralleli, ciascun piano individua sui due solidi due sezioni equivalenti (= con la stessa area), allora i due solidi sono equivalenti (= hanno ugual volume) "



(*immagine opera di Anton, da Wikimedia Commons, qui utilizzata con licenza GFDL, GNU Free Documentation License*)

Teorema 1: due prismi, o un prisma e un cilindro, o due cilindri, aventi basi equivalenti e altezze uguali sono equivalenti.

Dimostrazione: per il Principio di Cavalieri.



Nella dimostrazione dell'enunciato di cui sopra occorre anche tener conto del fatto (intuitivo, ma comunque dimostrabile) che le sezioni di un prisma, o di un cilindro, con piani paralleli alle basi, sono tutte uguali (fra loro e con le basi)

CONSEGUENZE: FORMULA PER IL VOLUME DI UN PRISMA O DI UN CILINDRO

Un prisma è dunque, in particolare, equivalente ad un parallelepipedo rettangolo, avente base equivalente e altezza uguale a quella del prisma.

E anche un cilindro è equivalente ad un parallelepipedo rettangolo, avente base equivalente e altezza uguale a quella del cilindro.

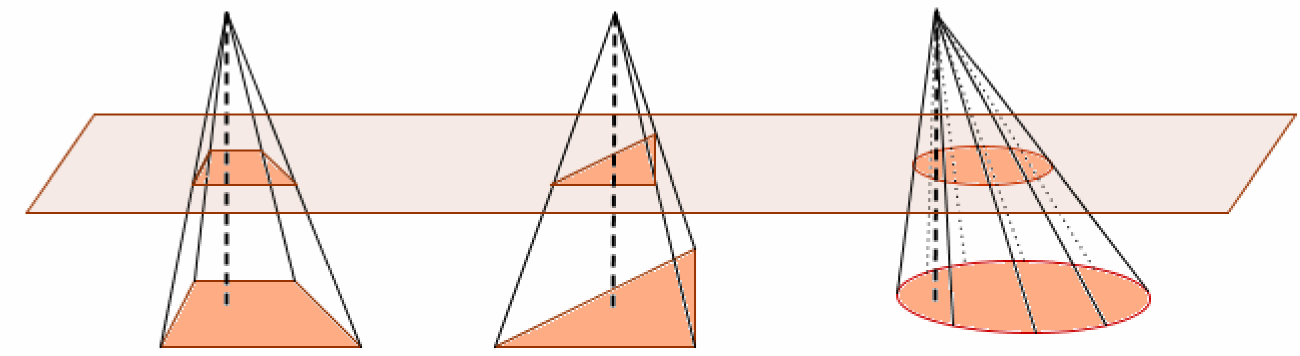
Quindi per calcolare il volume di un prisma qualsiasi o di un cilindro qualsiasi la formula da utilizzare è la stessa che abbiamo visto (paragrafo 3) valere per il parallelepipedo rettangolo, ossia

$$\boxed{V = S_{base} \cdot \text{altezza}}$$

che nel caso di un *cilindro*, retto o non retto, *a base circolare* di raggio r, diventa $\mathbf{V = \pi r^2 \cdot h}$

**Teorema 2: due piramidi, o una piramide e un cono, o due coni,
aventi basi equivalenti e altezze uguali sono equivalenti.**

Dimostrazione: per il Principio di Cavalieri.



Nella dimostrazione dell'enunciato di cui sopra occorre anche tener conto del fatto che date due piramidi, o due coni, o una piramide e un cono, se i due solidi hanno ugual altezza e basi equivalenti, sezionando i due solidi con due piani aventi ugual distanza dal vertice, si ottengono sezioni fra loro equivalenti (questo è conseguenza dell'ultimo teorema del paragrafo 2).

Teorema
Una piramide è equivalente alla terza parte di un prisma avente la stessa base e la stessa altezza.

Dimostrazione

Possiamo pensare di sostituire qualunque piramide assegnata, con una qualsiasi piramide *a base triangolare*, purché tale seconda piramide abbia altezza uguale e base equivalente a quella della piramide originaria. Infatti la "vecchia" piramide e quest'altra "nuova" saranno equivalenti per il precedente Teorema 2; mentre il Teorema 1 ci assicura che prismi con basi equivalenti e altezze uguali sono equivalenti.

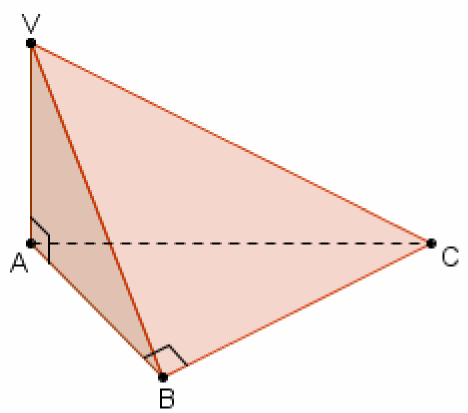
Noi supporremo che la "nuova" piramide, equivalente alla "vecchia", abbia

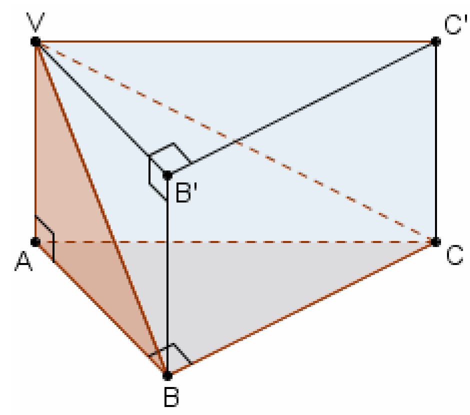
- come base un triangolo rettangolo
- e il vertice tale che la sua proiezione sul piano della base
  cada proprio nel vertice di uno degli angoli acuti del triangolo di base

(in realtà, nessuna di queste due condizioni è indispensabile per la dimostrazione,
tuttavia in questo modo la comprensione dei disegni dovrebbe probabilmente risultare meno difficoltosa).

Partiamo dunque
dalla piramide ABCV
della figura qui a destra,
e innanzitutto costruiamo
il prisma ABCC'B'V
avente base ABC
e altezza AV.

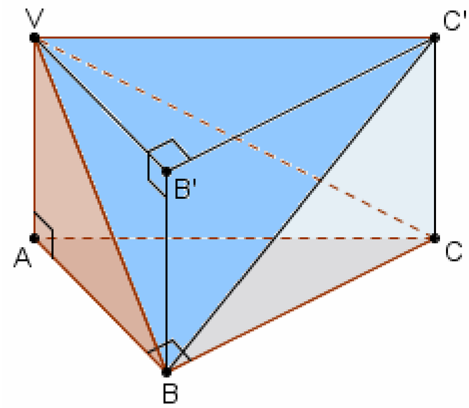
**Ci proponiamo
di dimostrare che
la piramide ABCV
è la terza parte
del prisma ABCC'B'V .**

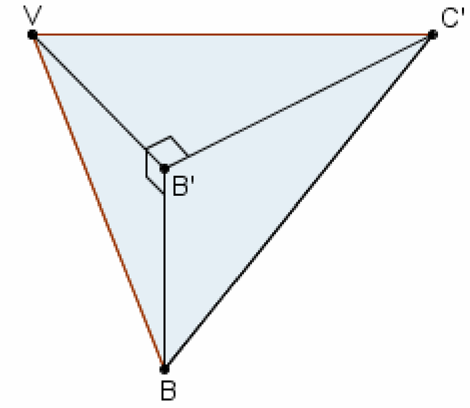


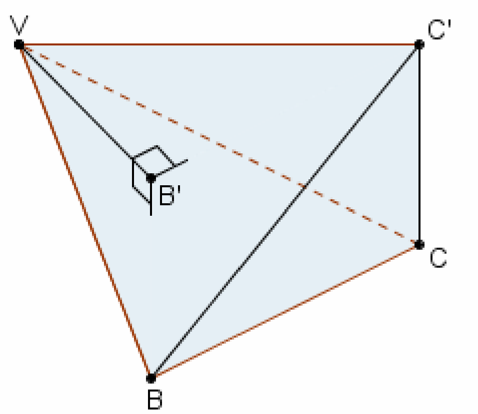


In pratica, alla piramide è stato aggiunto il solido BCC'B'V , che ha forma di piramide a base rettangolare.

Adesso tracciamo la diagonale BC' del rettangolo BCC'B' ,
che è la base del solido piramidale BCC'B'V
che abbiamo aggiunto alla piramide iniziale;
il piano passante per i 3 punti B, C' e V
divide la piramide a base rettangolare BCC'B'V
in due piramidi a base triangolare,
che sono BC'B'V e BCC'V .
La prima è facile da visualizzare, la seconda un po' meno:
penso saranno utili le due figure seguenti,
che mostrano tali due piramidi singolarmente:

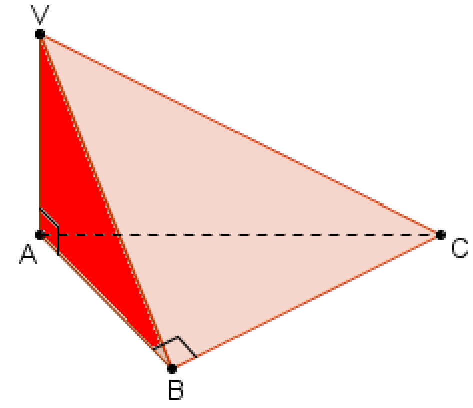


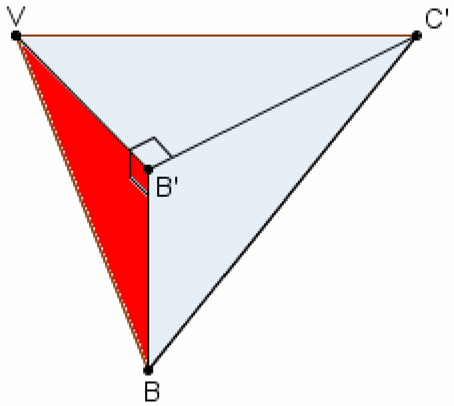




Nella seconda figura abbiamo lasciato anche il segmento VB', per evidenziare che esso fa da altezza per *entrambe* le piramidi se ne prendiamo come basi BC'B' e BCC' rispettivamente; ma allora, dato che i due triangoli BC'B' e BCC' sono uguali fra loro in quanto ottenuti dividendo un rettangolo con una sua diagonale, le due piramidi, per avere ugual base e uguale altezza, **sono equivalenti**.

Riconsiderando ora la piramide ABCV di partenza, scopriamo che essa è equivalente alla BC'B'V perché



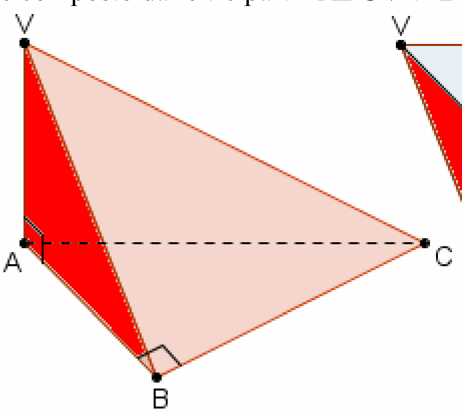


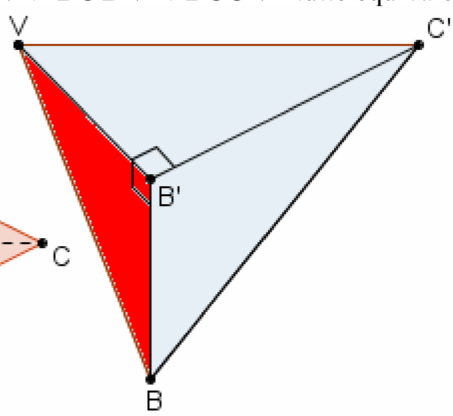
se si prendono per basi ABV e BB'V rispettivamente, le altezze corrispondenti sono CB e C'B', ed essendo

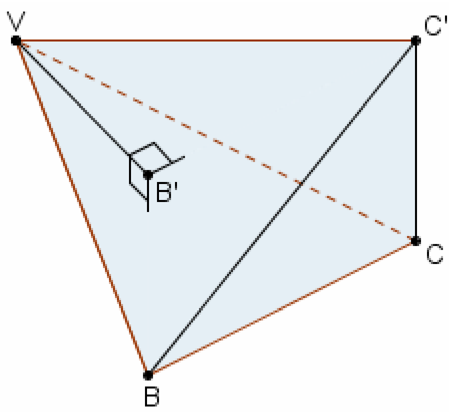
- ABV = BB'V (triangoli in cui un rettangolo viene spezzato da una diagonale)
- e CB = C'B' (lati opposti di un rettangolo),

ABCV e BC'B'V hanno ugual base e ugual altezza.

Ma allora il prisma ABCC'B'V, avente la stessa base e la stessa altezza della piramide iniziale ABCV, è composto dalle tre parti ABCV + BC'B'V + BCC'V tutte equivalenti fra loro!







Ciascuna delle tre parti è perciò 1/3 del prisma; in particolare, $ABCV = \frac{1}{3} ABCC'B'V$ e la tesi è dimostrata.

CONSEGUENZE: FORMULA PER IL VOLUME DI UNA PIRAMIDE O DI UN CONO

Poiché dunque una piramide, o un cono, hanno volume uguale a 1/3 del volume di un prisma che ha base equivalente e altezza uguale, per calcolare il volume di una piramide o di un cono la formula da utilizzare sarà

$$\boxed{V = \frac{1}{3} S_{base} \cdot altezza = \frac{S_{base} \cdot altezza}{3}}$$