8. ESERCIZI (risposte alle pagg. 344 -345)

1) Per 3 punti distinti, non allineati, passa un piano e uno solo.
E se i tre punti distinti fossero invece allineati, per essi quanti piani passerebbero?

2) Come mai dal fatto che per 3 punti distinti, non allineati, passa un piano e uno solo, discende come conseguenza che *due rette incidenti individuano un piano e uno solo*?

3) Un icosaedro ha 20 facce e 30 spigoli. Quanti vertici ha?

4) “In una piramide qualsiasi (anche non retta), detti V il vertice, AB un lato della base, H la proiezione di V sul piano della base, e K la proiezione di H su AB, si ha che VK è l'altezza del triangolo VAB”: dimostra questo enunciato (*figura*).

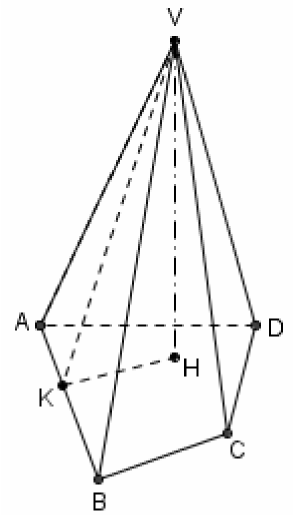


Figura 4 - Una piramide

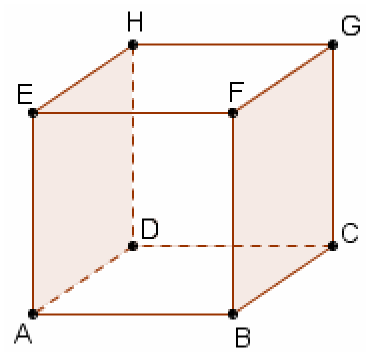
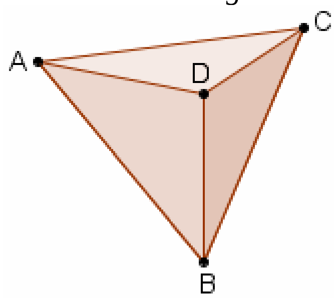


Figura 5 - Un cubo

5) Quanto misura la diagonale di un cubo di lato unitario?

Indicazione (con riferimento alla figura): traccia BD e BH; ora, HD è perpendicolare a BD: perché? Pitagora 2 volte.

Figura 6 - Un tetraedro regolare



6) Se un tetraedro regolare ha lato di lunghezza 1, quanto misura la sua altezza?

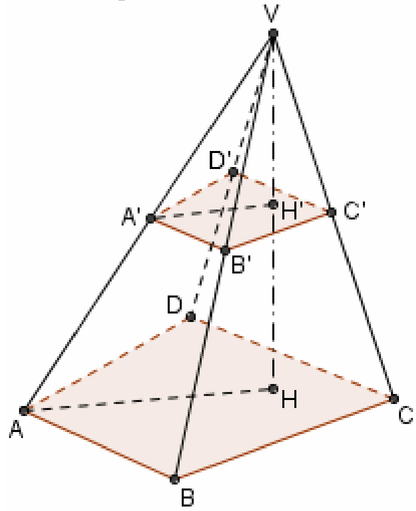
Indicazione: immagina di sezionare il tetraedro regolare con un piano che passi per uno degli spigoli, e sia perpendicolare a un altro spigolo; otterrai un triangolo; quanto misurano i suoi lati? Poi …

7) Completa le parti mancanti, indicate coi puntini di sospensione.

Teorema riguardante la sezione di una piramide con un piano parallelo alla base

“Se si taglia una piramide con un piano parallelo alla base, la sezione è un poligono simile al poligono che fa da base per la piramide. Inoltre, i lati corrispondenti (e i perimetri) di questi due poligoni simili stanno fra loro come le rispettive distanze dal vertice della piramide, e le aree stanno fra loro come i quadrati di tali distanze”.

Dimostrazione



Nella figura qui a fianco, $A'B'C'D'$ è il poligono sezione della piramide con un piano parallelo alla base ABCD.
Dico che il poligono $A'B'C'D'$ è simile al poligono ABCD. Infatti: i segmenti $A'B'$ e AB sono paralleli, in quanto le rette su cui giacciono stanno su due piani paralleli e pertanto non possono avere punti comuni.
Ma allora i due triangoli $VA'B'$ e VAB sono simili perché … e quindi
$A'B' : AB = VA' : VA = VB' : VB$.
Ora per la similitudine (stesso motivo) di $VB'C'$ e VBC si ha pure
$VB' : VB = VC' : VC = B'C' : BC$
e ne consegue $A'B' : AB = B'C' : BC$.
Continuando in modo analogo, si dimostra che è
$A'B' : AB = B'C' : BC = C'D' : CD = D'A' : DA$
quindi i poligoni $A'B'C'D'$ e ABCD hanno i lati in proporzione.
Per poter concludere che sono simili occorre ancora far vedere che …

Ma in effetti è $A'\widehat{B'}C' = A\widehat{B}C$ perché hanno i lati paralleli e concordi (si può dimostrare che il teorema, da noi visto sul piano, vale pure nello spazio) e analogamente per le altre coppie di angoli corrispondenti.
E così la similitudine è dimostrata.

La proporzione $A'B' : AB = VH' : VH$ (e analogamente per le altre coppie di lati corrispondenti) si giustifica considerando ora la similitudine dei triangoli … con le considerazioni seguenti: …
Infine, è noto che i perimetri di due triangoli simili stanno fra loro come … e quindi nel nostro caso come … mentre le aree stanno fra loro come … e quindi nel nostro caso come …

8) Una piramide retta ha per base un esagono regolare di lato 1, e ha altezza 2.
Calcola spigolo laterale e apotema.

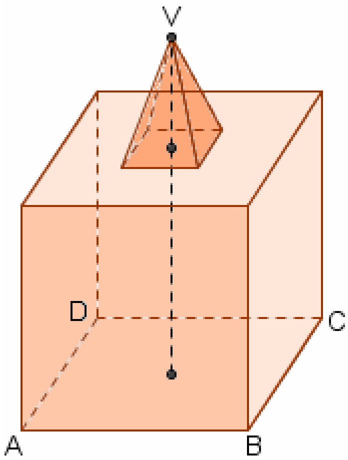
9) Una piramide retta ha per base un triangolo equilatero di lato 1,
e ha altezza pure uguale a 1. Calcola spigolo laterale e apotema.

10) Quanto distano due vertici opposti di un ottaedro regolare di spigolo unitario?

11) Una piramide retta la cui base è un quadrato il cui lato misura 2 ha altezza anch'essa uguale a 2.
Stabilisci quanto misurano: a) lo spigolo laterale b) l'apotema c) il lato del cubo inscritto

12) Una piramide viene intersecata da un piano, parallelo alla base, che taglia l'altezza in due parti delle quali quella contenente il vertice è 1/3 dell'altra.
Se l'area della base della piramide misura B, quanto misura l'area della sezione?

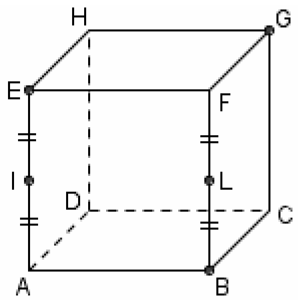
13) Un cubo di lato 2 ha in comune la base ABCD con una piramide retta di altezza 3. La piramide spunta perciò fuori dal cubo.
E' richiesto di determinare il volume di questo solido, e la sua superficie totale (*vedi figura qui a fianco*).



14) Di un tronco di cono si suppongono note:
l'area B della base maggiore, l'area b della base minore,
la misura h dell'altezza.
Ricava le altezze delle due piramidi di cui il tronco è la differenza e deduci da tutto ciò la formula per il volume del tronco di piramide, riportata al paragrafo precedente.

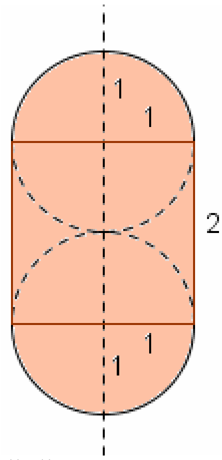
15) Tagliando una piramide con un piano, a metà della sua altezza, si ottiene un tronco di piramide.
Qual è il rapporto fra il volume del tronco e quello della piramide intera?
La risposta dipende dalla forma della piramide?

16) La figura qui sotto rappresenta un cubo di lato 1. Trova i volumi dei due solidi ottenibili tagliando il cubo con il piano passante
a) per i tre punti B, E, G
b) per i tre punti I, L, C

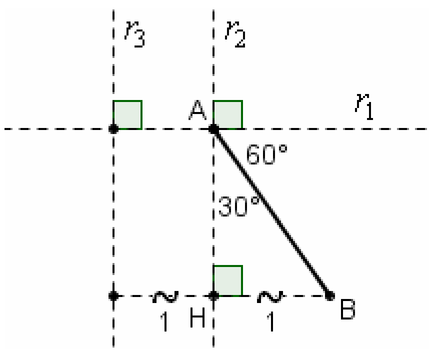


17) Dal vertice A di un triangolo equilatero ABC di lato 1 si alza un segmento AD perpendicolare al piano ABC, e di lunghezza 1. Trova volume e superficie totale del tetraedro ABCD e spiega perché *non* si tratta di una piramide retta sulla base ABC.

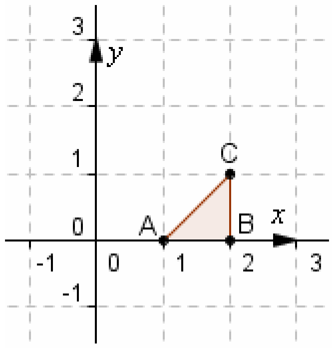
18) Calcola volume e superficie totale del solido a forma di pastiglia che si ottiene ruotando di un giro completo intorno all'asse tratteggiato, la superficie raffigurata, composta da un quadrato di lato 2 più due semicerchi di diametro 2.



19) Il segmento AB viene ruotato di un giro completo intorno alla retta r_1.
Determina l'area della superficie di rotazione.
Stesso quesito con riferimento a r_2, r_3.



20) Calcola il volume del solido ottenibile ruotando il triangolo ABC intorno a) all'asse x b) all'asse y

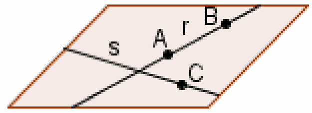


21) Determina il lato del cubo inscritto in una piramide regolare con base quadrata, nella quale il lato del quadrato di base abbia misura a e l'altezza abbia misura h.

RISPOSTE

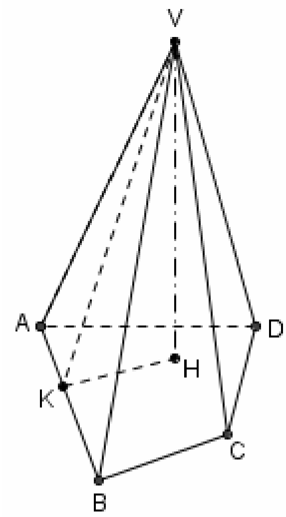
1) Per 3 punti allineati passano infiniti piani.

2) Perché su una delle rette possiamo prendere 2 punti qualsiasi A e B,
e sull'altra un terzo punto C (purché non sia proprio l'intersezione fra le due)
e avremo quindi 3 punti non allineati, per i quali passerà 1 e 1 solo piano,
su cui le 2 rette giaceranno completamente perché se 2 punti di una retta appartengono ad un piano, vi appartengono di certo anche tutti gli altri punti della retta.



3) f+v = s+2 (formula di Eulero) da cui, nel caso di un icosaedro (s=30, f=20), v = s+2−f = 30+2−20=12.

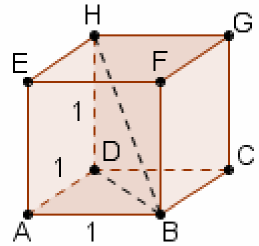
4) Nella situazione della figura, VK è l'altezza del triangolo VAB per il Teorema delle 3 perpendicolari. Infatti VH è perpendicolare al piano ABCD, e dal piede H di questa perpendicolare parte una seconda retta, la HK, che è perpendicolare ad una terza retta, la AB, giacente su quel piano: ma allora questa terza retta, secondo il teorema citato, è perpendicolare al piano individuato dalle prime due, che è poi il piano VHK:
e ciò significa che AB è perpendicolare a tutte le rette di VHK passanti per K, quindi è perpendicolare anche a VK, come volevasi dimostrare.



5) Innanzitutto, con riferimento alla figura, HD è perpendicolare a BD perché HD è perpendicolare, in D, alle due rette DA e DC, ma allora sarà perpendicolare a tutte le rette del piano da esse individuato, passanti per D: e BD è una di queste.

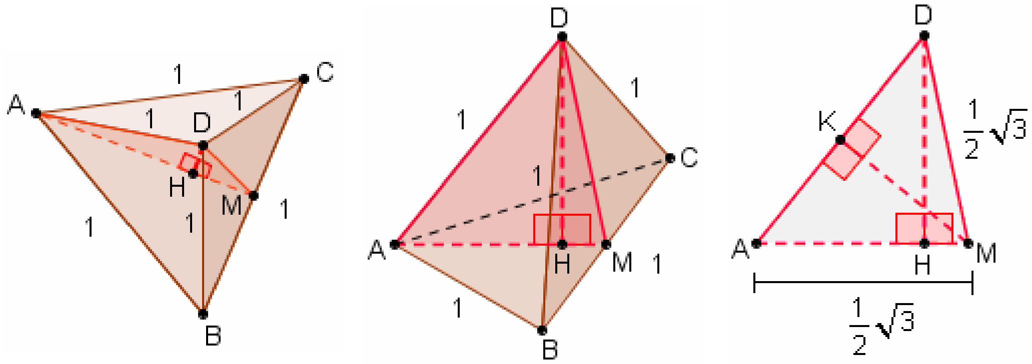
Ora $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

e $HB = \sqrt{HD^2 + BD^2} = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$



6) Se un tetraedro regolare ha lato di lunghezza 1, quanto misura la sua altezza?

DM e AM, altezze di triangoli equilateri di lato 1, misurano ciascuno $\frac{1}{2}\sqrt{3}$



Con riferimento alla figura più a destra, possiamo calcolare l'altezza DH procedendo ad esempio così: calcoliamo l'area del triangolo AMD prendendo come base AD e come altezza MK:

$$MK = \sqrt{DM^2 - DK^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad S_{AMD} = \frac{AD \cdot MK}{2} = \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

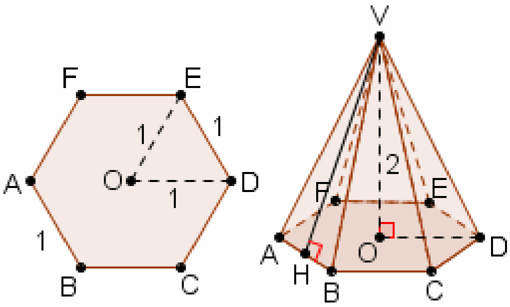
dopodiché, prendendo invece come base AM e come altezza DH: $DH = \frac{2S_{AMD}}{AM} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

7) $VA'B'$ e VAB sono simili perché *hanno gli angoli rispettivamente uguali (uno in comune, due coppie di corrispondenti rispetto a parallele con trasversale)* o anche: *per il Corollario del 1° Crit. di Similitudine.*

Per poter concludere che sono simili occorre ancora far vedere che *hanno gli angoli rispettivamente uguali.*

La proporz. $A'B' : AB = VH' : VH$ si giustifica considerando ora la similitudine dei triangoli $VH'A'$, VHA con le considerazioni seguenti: *tale similitudine ci dice che* $VA' : VA = VH' : VH$ *, ma sapevamo che era* $VA' : VA = A'B' : AB$ *quindi ne deduciamo che* $A'B' : AB = VH' : VH$.

Infine, è noto che i perimetri di due triangoli simili stanno fra loro *come due lati omologhi* e quindi nel nostro caso come $VH' : VH$ mentre le aree *come i quadrati di due lati omologhi* $\left(VH'^2 : VH^2\right)$.



8) $\textit{spigolo laterale} = \mathrm{VD} = \sqrt{\mathrm{OD}^2+\mathrm{VO}^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$\textit{apot.} = \mathrm{VH} = \sqrt{\mathrm{VB}^2-\mathrm{HB}^2} = \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{19}{4}} = \frac{\sqrt{19}}{2}$

9) $\textit{spigolo laterale} = \frac{2}{\sqrt{3}}$; $\textit{apotema} = \sqrt{\frac{13}{12}}$

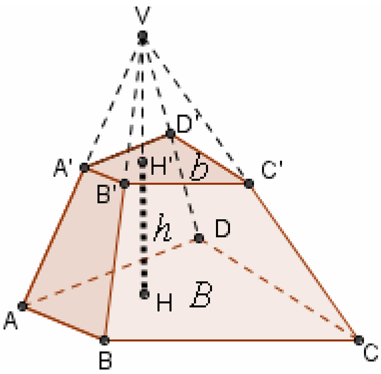
10) $\sqrt{2}$

11) $\textit{spigolo laterale} = \sqrt{6}$; $\textit{apotema} = \sqrt{5}$; $\ell = 1$

12) $\frac{1}{16}B = \frac{B}{16}$

13) $\textit{Volume} = 8+\frac{4}{27} = \frac{220}{27}$ $\quad \textit{Sup. totale} = 4\cdot 6 - \frac{4}{9} + \frac{\frac{8}{3}\cdot\frac{\sqrt{10}}{3}}{2} = 24-\frac{4}{9}+\frac{4\sqrt{10}}{9} = \frac{212+4\sqrt{10}}{9} = \frac{4}{9}\left(53+\sqrt{10}\right)$

14)



$\mathrm{VH'} = x, \quad \mathrm{VH} = x+h$.

E' noto (teorema sulle sezioni di una piramide con piani paralleli alla base, paragrafo 2, ripreso poi nell'esercizio 7 di questa rassegna), che vale la proporzione $b : B = \mathrm{VH'}^2 : \mathrm{VH}^2$

quindi si avrà $b : B = x^2 : (x+h)^2$ da cui

$$Bx^2 = b(x+h)^2 \quad \ldots$$
$$(B-b)x^2 - 2bhx - bh^2 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{bh \pm \sqrt{b^2h^2+(B-b)bh^2}}{B-b} = \frac{bh\pm\sqrt{Bbh^2}}{B-b} = h\frac{b\pm\sqrt{Bb}}{B-b}$$

Delle due soluzioni quella col "–" è <0 $\left(B > b \textit{ e quindi } \sqrt{Bb} > \sqrt{b^2} = b\right)$ e perciò non accettabile.

Resta l'altra, che porta a

$$\mathrm{VH'} = h\frac{\sqrt{Bb}+b}{B-b}; \qquad \mathrm{VH} = \mathrm{VH'}+h = h\frac{\sqrt{Bb}+b}{B-b}+h = \frac{h\sqrt{Bb}+\cancel{bh}+Bh-\cancel{bh}}{B-b} = h\frac{\sqrt{Bb}+B}{B-b}$$

per cui il volume del tronco, differenza dei volumi delle due piramidi, sarà

$$\frac{B\cdot h\frac{\sqrt{Bb}+B}{B-b}}{3} - \frac{b\cdot h\frac{\sqrt{Bb}+b}{B-b}}{3} = \frac{Bh\frac{\sqrt{Bb}+B}{B-b}-bh\frac{\sqrt{Bb}+b}{B-b}}{3} = \frac{Bh\sqrt{Bb}+B^2h-bh\sqrt{Bb}-b^2h}{3(B-b)} =$$
$$= \frac{h\sqrt{Bb}(B-b)+h\left(B^2-b^2\right)}{3(B-b)} = \frac{h\sqrt{Bb}\cancel{(B-b)}+h(B+b)\cancel{(B-b)}}{3\cancel{(B-b)}} = \frac{\left(B+b+\sqrt{Bb}\right)h}{3}$$

che è proprio la formula riportata nel paragrafo precedente a questo.

15) Il rapporto è 7/8; no, la risposta è *indipendente* dalla forma della piramide

16) *a)* 1/6, 5/6 *b)* 1/4, 3/4

17) $\mathrm{V} = \frac{\sqrt{3}}{12}$; $\mathrm{S_{TOT.}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}+4}{4}$ Sarebbe stata retta se la proiezione del vertice sulla base fosse stato il *centro* della base stessa, non un suo vertice

18) $\mathrm{V} = \frac{10}{3}\pi$; $\mathrm{S_{TOT.}} = 8\pi$

19) *a)* $\mathrm{S} = 2\pi\sqrt{3}$ *b)* $\mathrm{S} = 2\pi$ *c)* $\mathrm{S} = 6\pi$

20) *a)* $\mathrm{V} = \frac{\pi}{3}$ *b)* $\mathrm{V} = \frac{5}{3}\pi$

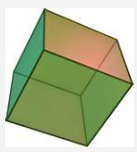
21) $\textit{lato cubo inscritto} = \frac{ah}{a+h}$

Euler's Formula
For any polyhedron
***that doesn't intersect itself,* the**

- **Number of Faces**
- plus the **Number of Vertices** (corner points)
- minus the **Number of Edges**

always equals 2.
This can be written: **F + V - E = 2**

Try it on the cube:
a cube has
6 Faces, 8 Vertices, and 12 Edges,
so: 6 + 8 - 12 = 2



www.mathsisfun.com

Altri esercizi (risposte a pagina 347)

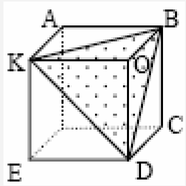
Da www.mathvisuals.com

1) The length, the width and the altitude of a rectangular prism are directly proportional by 3, 4 and 5. If the diagonal of the rectangular prism is $\sqrt{200}$ cm, find the total surface (cm^2)

A) 480 B) 462 C) 564 D) 376 E) 188

2) Find the ratio between the volume of the pyramid BKDO and the cube

A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$



3) The volumes of a cylinder and a sphere with equal radii r are equal. Find the altitude of the cylinder in terms of r.

A) $4r$ B) $2r$ C) $4/3$ D) $r/3$ E) $4r/3$

4) The sum of the base areas of a cylinder is equal to the area of the lateral face. If the altitude of the cylinder is 2 cm, find the volume (cm^3)

A) 8π B) 6π C) 4π D) 2π E) π

5) If the areas of the lateral faces of a right rectangular prism are $2\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ and $2\sqrt{6}$ cm^2 find the volume of this prism (cm^3)

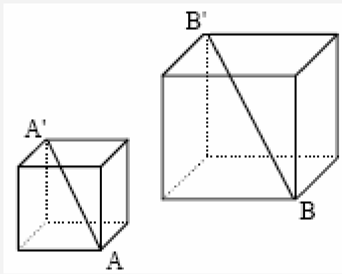
A) $\sqrt{6}$ B) 5 C) $2\sqrt{6}$ D) 6 E) 8

6) A sphere is inscribed in a cylinder. Let C and S denote the lateral area of the cylinder and surface area of the sphere respectively then …

A) C=2S B) 2C=S C) C=3S D) 3C=S E) C=S

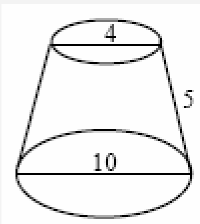
7) In the given figures, $AA'=1$ cm and $BB'=3$ cm. Find the ratio of the volumes of the cubes.

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{9}$ D) $\frac{1}{27}$ E) $\frac{1}{81}$



8) The radii of the frustum of cone are 2 and 5 cm. If the lateral side of the cone is 5 cm, then find the volume of the cone.

A) 38π B) 40π C) 50π
D) 52π E) 56π

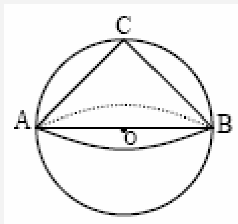


Frustum of cone: tronco di cono

9) In the given figure, what is the ratio between the volume of the sphere and the volume of the cone?

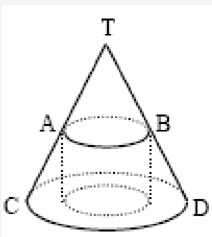
A) 2 B) $2\frac{1}{2}$ C) 3

D) $3\frac{1}{2}$ E) 4



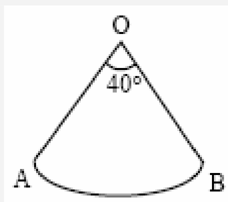
10) A right cylinder is inscribed inside a right cone. If the volume of the frustum of the cone ABCD is 26 times the volume of the small cone TAB, find the ratio between the volume of the frustum of the cone and the cylinder.

A) 3 B) 4 C) $\frac{13}{2}$ D) $\frac{13}{3}$ E) $\frac{26}{3}$

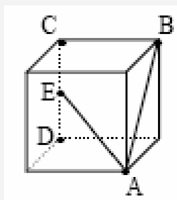


11) By using the sector given in the figure, a right cone is formed. If the altitude of the cone is $16\sqrt{5}$ cm, find the lateral area of the cone (in cm^2)

A) 144π B) 160π C) 360π
D) 800π E) 1800π



12) Se conosci un certo teorema di trigonometria, potrai determinare la misura dell'angolo $B\hat{A}E$ (E è il punto medio di CD, il solido è un cubo)



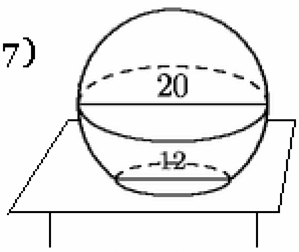
Da www.sparknotes.com

13) A right triangle with legs 5 and 12 is rotated about the longer leg.
What is the surface area of the solid formed?
(A) $36\pi\ \text{cm}^2$ (B) $60\pi\ \text{cm}^2$ (C) $90\pi\ \text{cm}^2$ (D) $112\pi\ \text{cm}^2$ (E) $114\pi\ \text{cm}^2$

14) A cylinder's radius is equal to its height. If its surface area is $100\pi\ \text{cm}^2$, what is its volume?
(A) $25\pi\ \text{cm}^3$ (B) $50\pi\ \text{cm}^3$ (C) $100\pi\ \text{cm}^3$ (D) $125\pi\ \text{cm}^3$ (E) $625\pi\ \text{cm}^3$

15) Cone A has volume 24. When its radius and height are multiplied by the same factor, the cone's surface area doubles. What is cone A's new volume?
(A) $24\sqrt{2}$ (B) 48 (C) $48\sqrt{2}$ (D) 96 (E) Not enough information to tell

16) A cylinder is inscribed in a sphere. If the radius of the sphere is 5 and the height of the cylinder is 8, then what is the volume of the cylinder? (A) 80 (B) 110.82 (C) 187.25 (D) 226.19 (E) 267.30

17)


18)


Olimpiada Mexicana de matematicas - Problemas introductorios

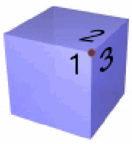
17) Un tavolino ha un buco circolare del diametro di 12 cm. Sul buco si piazza una sfera il cui diametro è 20 cm. Se il piano del tavolino è alto 30 cm, qual è la distanza in centimetri dal punto più alto della sfera al pavimento?
(A) 40 cm (B) 42 cm (C) 45 cm (D) 48 cm (E) 50 cm

18) Un poliedro a forma di pallone di football ha 32 facce, delle quali 20 sono esagoni regolari e 12 pentagoni regolari. Quanti vertici ha il poliedro?
(A) 72 (B) 90 (C) 60 (D) 56 (E) 54

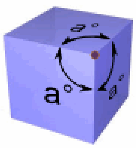
British Columbia Secondary School Mathematics Contest, 2009

19) Un blocco di legno di 6 cm X 12 cm X 22 cm è pitturato in rosso e poi tagliato in cubetti la cui superficie totale è di 6 cm^2.
Il numero di cubetti con esattamente 2 facce colorate è
(A) 136 (B) 144 (C) 152 (D) 156 (E) 160

I solidi platonici sono solo 5. Perché?

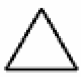
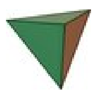
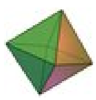
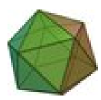
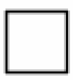
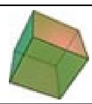
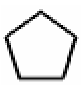
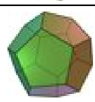


In ogni vertice di un poliedro concorrono 3 o più facce: comunque, almeno 3; e in un poliedro regolare (= platonico) queste facce sono poligoni regolari, quindi gli angoli in gioco sono tutti uguali fra loro, e sono angoli interni di poligoni regolari, ossia di: triangoli equilateri, o quadrati, o pentagoni regolari …



Bene: addizionando le misure degli angoli che concorrono in un vertice di un poliedro, quindi anche di un poliedro regolare, si ottiene sempre una somma inferiore ai 360° (te ne puoi convincere in modo intuitivo se pensi che, qualora tale somma raggiungesse i 360°, la figura si appiattirebbe …)

Ma allora in un vertice di poliedro regolare possono concorrere soltanto:

	3 triangoli equilateri (3×60°=180°) 4 triangoli equilateri (4×60°=240°) 5 triangoli equilateri (5×60°=300°)	 tetraedro	 ottaedro	 icosaedro
	3 quadrati (3×90°=270°)	 cubo		
	3 pentagoni regolari (3×108°=324°)	 pentadodecaedro		

Le figure di questa pagina sono tratte da www.mathsisfun.com

Altre possibilità non ce ne sono, perché ad esempio un esagono regolare ha gli angoli interni tutti di 120°, e al minimo in ogni vertice avremmo dunque una somma uguale a 3×120°=360°, già non ammissibile; un eptagono regolare ha poi gli angoli interni ancora più grandi, di 900/7 di grado ossia circa 128,57 gradi: tre di questi angoli, sommati, supererebbero già i 360° …

RISPOSTE agli esercizi: 1D2E3E4A5C6E7D8D9E10D11A 12: 45° (*) 13C14D15C16D17D18C19A
(*) teorema del Coseno su BAE, i cui lati, posto uguale a 1 il lato del cubo, misurano risp. $\sqrt{2}, 3/2, \sqrt{5}/2$