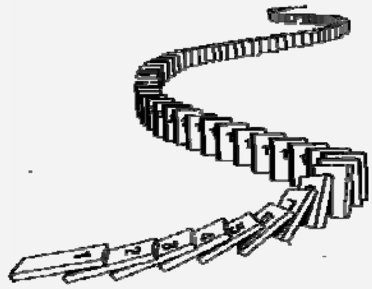
IL PRINCIPIO DI INDUZIONE MATEMATICA

SE una proprietà P(x), il cui insieme ambiente sia $\mathbb{N}$:
- **vale per il numero 0**
- **e, nel caso valga per un numero naturale x, vale certamente anche per il successivo $x+1$**

ALLORA quella proprietà vale per ogni numero naturale.

Per dimostrare, applicando il P.I.M., che una data proprietà P(x) è valida per ogni x appartenente ad $\mathbb{N}$, si procede nel modo seguente:
a) si verifica che la proprietà P(x) vale con $x=0$;
b) si suppone, come ipotesi di lavoro ("ipotesi induttiva") che la proprietà valga con $x=k$, e si dimostra che, sotto questa ipotesi, dovrà necessariamente valere anche con $x=k+1$.

Un'ovvia variante consiste nel "partire da 1" anziché da zero.



Questa suggestiva figura viene dal sito www.parabola.unsw.edu.au

- Dimostriamo che $\forall x\in\mathbb{N}^*,\quad 1+2+3+...+x=\dfrac{x(x+1)}{2}$ tramite il "Principio di Induzione Matematica" (precisamente, la sua variante in $\mathbb{N}^*$, ossia la variante che parte da 1 anziché da 0)

a) L'uguaglianza da dimostrare è verificata con $x=1$?
Vediamo: con $x=1$, l'uguaglianza da dimostrare diventa $1=\dfrac{1\cdot(1+1)}{2}$ che è vera! OK!

b) Supponiamo ora che l'uguaglianza da dimostrare sia vera con $x=k$: supponiamo cioè che si abbia

$$(*)\quad 1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2}\quad \text{"}\mathit{IPOTESI\ INDUTTIVA}\text{"}$$

Ci chiediamo: essa sarà ancora vera anche per $x=k+1$?
Partiamo dal 1° membro dell'uguaglianza da dimostrare, ponendo $x=k+1$. Il nostro obiettivo è di controllare se il valore dell'espressione così ottenuta equivale a $\left[\dfrac{x(x+1)}{2}\right]_{con\ x=k+1}$. Avremo:

$$[1+2+3+...+x]_{con\ x=k+1}=1+2+3+...+k+(k+1)\overset{per\ la\ (*)}{=}\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=$$
$$=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}=\left[\frac{x(x+1)}{2}\right]_{con\ x=k+1}\quad \text{OK!}$$

Pertanto: l'uguaglianza da dimostrare è vera con $x=1$, e, qualora sia vera con $x=k$, continua certamente a valere anche per $x=k+1$: è perciò vera per $x=2,\ x=3,\ x=4,\ x=5,\ ...$ Insomma, con un "effetto domino" cui si ispira la figura in alto, è vera per ogni numero naturale non nullo x.

- Dimostriamo che $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad 1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ col "P.I.M." Qui usiamo n anziché x: fa niente, vero? ☺

Anche in questo caso, evidentemente, partiremo da 1 anziché da 0.

a) L'uguaglianza da dimostrare è verificata con $n=1$? Con $n=1$, essa diventa $1^2=\dfrac{1\cdot(1+1)(2+1)}{6}$, OK!

b) Supponiamo che l'uguaglianza da dimostrare sia vera con $n=k$: supponiamo cioè che si abbia

$$(*)\quad 1^2+2^2+3^2+...+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}\quad \text{"}\mathit{IPOTESI\ INDUTTIVA}\text{"}$$

Ci chiediamo: essa sarà ancora vera anche per $n=k+1$?

$$\left[1^2+2^2+3^2+...+n^2\right]_{con\ n=k+1}=1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2\overset{per\ la\ (*)}{=}\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=$$
$$=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=\frac{(k+1)(2k^2+k+6k+6)}{6}=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}=\frac{(k+1)(2k^2+4k+3k+6)}{6}=$$
$$=\frac{(k+1)[2k(k+2)+3(k+2)]}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}=\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]_{con\ n=k+1}\quad \text{OK!}$$

Il P.I.M. ci consente a questo punto di affermare che l'uguaglianza proposta è effettivamente vera per ogni numero naturale non nullo n.

❑ Applicando il "Principio di Induzione Matematica", dimostriamo che:
$\forall n \in \mathbb{N}$, *se un insieme* A *ha n elementi, il suo insieme delle parti* P(A) *ha* 2^n *elementi.*

a) La proprietà da dimostrare è vera per $n = 0$?
Nel caso $n = 0$, l'insieme A è privo di elementi: $A = \varnothing$.
L'insieme $P(A)$ è dunque, in questo caso, $P(\varnothing)$,
vale a dire l'insieme i cui elementi sono i sottoinsiemi dell'insieme vuoto.
Ma l'insieme vuoto ha *uno e un solo* sottoinsieme: sé stesso.
Perciò $P(A) = P(\varnothing) = \{\varnothing\}$ (l'insieme, il cui unico elemento è l'insieme vuoto).
L'insieme A conteneva $n = 0$ elementi; abbiamo visto che $P(A)$ contiene 1 elemento.
Ma $1 = 2^0$. Perciò la proprietà da dimostrare è vera quando $n = 0$.

b) Supponiamo che la proprietà da dimostrare sia vera per un certo numero naturale k: supponiamo cioè che, ogniqualvolta un insieme A contiene k elementi, il suo insieme delle parti $P(A)$ contenga 2^k elementi (in altre parole: supponiamo che un insieme di k elementi abbia sempre 2^k sottoinsiemi).
Questa è la nostra ipotesi induttiva: "se un insieme A contiene k elementi, allora ha 2^k sottoinsiemi".
Vogliamo ora far vedere che, sotto tale ipotesi, la proprietà deve continuare a valere anche per $k+1$, ossia: che "un insieme contenente $k+1$ elementi deve avere necessariamente 2^{k+1} sottoinsiemi".
In effetti: un insieme B che abbia $k+1$ elementi, può essere pensato come ottenibile a partire da un insieme A contenente k elementi, al quale venga aggiunto un nuovo elemento w.
Ora, per contare i sottoinsiemi di $B = A \cup \{w\}$, possiamo suddividerli in *due categorie*:
- quelli che non contengono w
- e quelli che contengono w

Ma i sottoinsiemi della prima categoria sono tutti e soli i sottoinsiemi di A!
Quindi il loro numero è, per l'ipotesi induttiva, 2^k.
Pensiamo ora ai sottoinsiemi della seconda categoria. Osserviamo che se prendiamo uno di questi sottoinsiemi, e gli togliamo w, otterremo un sottoinsieme di A!
Quindi i sottoinsiemi della seconda categoria sono tutti e soli quegli insiemi, ottenibili partendo da uno dei 2^k sottoinsiemi di A, e aggiungendogli l'elemento w.
Pertanto anche i sottoinsiemi della seconda categoria sono 2^k (tanti quanti i sottoinsiemi di A).
E in totale, i sottoinsiemi di B saranno dunque $2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$.
La dimostrazione è così completata.

Il "Principio di Induzione Matematica" non è, evidentemente, uno strumento adatto a "ricavare" formule; semmai, serve per dimostrare "A POSTERIORI" la validità generale di una formula, o di una regola, che sia stata precedentemente ipotizzata o intuita sulla base di esempi, o con ragionamenti vari.

ESERCIZI (verrà sempre utilizzata la lettera n al posto di x per indicare il generico intero: per gli interi è consuetudine impiegare preferibilmente lettere centrali dell'alfabeto, come n, m, i, k …)

Utilizzando il Principio di Induzione Matematica, dimostra che:

1) $\forall n \ge 0,\ 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

2) $\forall n \ge 1,\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

3) $\forall n \ge 1,\ 1 + 4 + 7 + \ldots + (3n-2) = \dfrac{n(3n-1)}{2}$

4) $\forall n \ge 0,\ 1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1} = \dfrac{a^n - 1}{a - 1}\ \ (a \in \mathbb{R},\ a \ne 1)$

5) $\forall n \ge 1,\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

6) $\forall n \ge 1,\ \dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dfrac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

7) $\forall n \ge 1,\ 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = \ldots$ Completa la formula, dimostrala col P.I.M.

8) $\forall n \ge 2,\ \left(1 - \dfrac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{4}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = \ldots$ Completa la formula, dimostrala col P.I.M.

9) $\forall n \ge 1,\ \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \ldots$ Completa la formula, dimostrala col P.I.M.

10) Se ci sono n persone e ognuna stringe la mano a ciascuna delle altre, quante strette si avranno? Verifica la validità, per ogni n, dell'espressione trovata, servendoti del P.I.M.

11) Qualunque sia l'intero n, il numero $n^2 + n$ è sempre pari.
Giustifica l'affermazione come ti garba, poi verificala ulteriormente servendoti del P.I.M.

12) Un poligono di n lati ha $\dfrac{n(n-3)}{2}$ diagonali. Dimostra col P.I.M. questa affermazione.