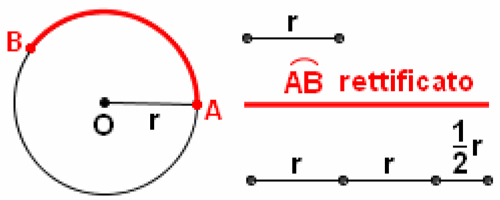
2. MISURA DI UN ARCO DI CIRCONFERENZA IN RADIANTI

Si dice che un arco di circonferenza è misurato in radianti
quando lo si misura assumendo come unità di misura il raggio della circonferenza stessa.
Vale a dire: per misurare un arco di circonferenza in radianti, **si immagina di rettificare questo arco, poi si misura il segmento così ottenuto, prendendo come unità di misura il raggio**.

Ad esempio, la lunghezza di un certo arco in radianti è 2.5 (= un certo arco misura 2.5 radianti)
se rettificando quell'arco si ottiene un segmento lungo esattamente 2.5 volte il raggio (vedi figura sottostante).
Un arco misura quindi UN radiante quando la lunghezza di quell'arco, supposto rettificato,
è uguale alla lunghezza del raggio della circonferenza.



In questa figura, l'arco $\overset{\frown}{AB}$ misura 2.5 radianti: infatti è esattamente due volte e mezza il raggio.

NOTA - "Misurare" un segmento **s** rispetto ad un altro segmento **u** (unità di misura)
vuol dire stabilire "quante volte" il segmento **u** che fa da unità di misura è contenuto in **s**:
e a tale scopo, qualora si conoscano le misure di **s** e di **u** rispetto ad **un'altra** unità di misura **u'** ,
basterà fare il quoziente fra tali due misure per conoscere la misura di **s** rispetto a **u** (Teorema del Rapporto).
Per questo, misurare un arco in radianti equivale a calcolare il quoziente, il rapporto, fra la lunghezza dell'arco
e la lunghezza del raggio della circonferenza, determinate entrambe rispetto a una medesima unità di misura.

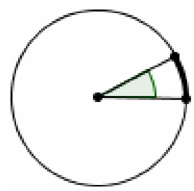
In pratica, il Teorema del Rapporto può essere illustrato con l'esempio seguente.
Supponiamo che un pensionato sia abituato a utilizzare il suo bastone per calcolare le lunghezze,
e abbia constatato che la misura del campo da bocce, quando l'unità di misura è il bastone, vale 8.5
(perché "il bastone ci sta esattamente 8 volte e mezzo nel campo da bocce").
Bene! Allora quel pensionato, qualora andasse a misurare sia il campo da bocce che il bastone in metri,
e facesse poi la divisione fra le due misure in metri ottenute, troverebbe come quoziente proprio 8.5.

UN ARCO SI PUO' MISURARE SIA IN RADIANTI CHE IN GRADI
E UN ANGOLO SI PUO' MISURARE SIA IN GRADI CHE IN RADIANTI

In una data circonferenza la lunghezza di un arco dipende in modo univoco dall'ampiezza dell'angolo al centro corrispondente, e viceversa. **Perciò**

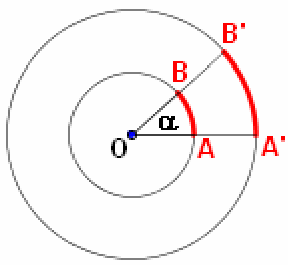
- ❑ **UN ARCO DI CIRCONFERENZA SI PUO' MISURARE SIA IN RADIANTI CHE IN GRADI;**
- ❑ **E UN ANGOLO, SIA IN GRADI CHE IN RADIANTI**
  [Evidentemente, per "misura in radianti di un angolo α"
  si intenderà la misura in radianti dell'arco che α stacca su di una
  qualsiasi circonferenza avente il centro nel vertice di α (NOTA)]

Dell'arco in figura, posso dire indifferentemente che misura



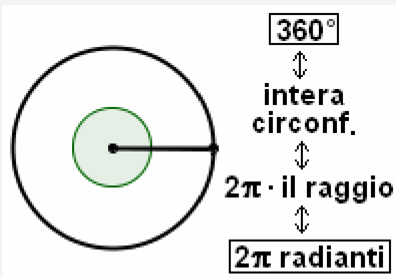
- ❑ **0.5 radianti** *(perché è lungo la metà del raggio)*
- ❑ **OPPURE** $\mathbf{28°\,39'}$ *(circa), perché tale è l'ampiezza dell'angolo al centro corrispondente.*

NOTA
E' intuitivo – e, volendo, dimostrabile –
che la misura ottenuta è del tutto indipendente
dal raggio della circonferenza che viene tracciata,
perché – ad esempio – raddoppiando il raggio
raddoppia anche la lunghezza dell'arco
e allora il rapporto *arco/raggio* rimane costante.



$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{OA}=\frac{\overset{\frown}{A'B'}}{OA'}=$$
$$= \text{misura in radianti di}: \quad \overset{\frown}{AB},\ \overset{\frown}{A'B'},\ \alpha$$

Se il raggio di una circonferenza è r , l'intera circonferenza misura 2π r :
cioè, 2π moltiplicato il raggio (= circa 6.28 volte il raggio). Perciò,
se come unità di misura si sceglie proprio il raggio,
la lunghezza dell'intera circonferenza risulta uguale a $\mathbf{2\pi}$ **.**
Di conseguenza,
la misura in radianti dell'intera circonferenza, ossia dell'arco
che corrisponde ad un angolo al centro di 360°, è $\mathbf{2\pi}$ (circa 6.28):
come misura di angolo o di arco, **360° EQUIVALE A** $\mathbf{2\pi}$ **RADIANTI** .



Dunque avremo:

Gradi	**360°**	$\mathbf{180° = \frac{1}{2}\cdot 360°}$	$\mathbf{90° = \frac{1}{4}\cdot 360° = \frac{1}{2}\cdot 180°}$
Radianti	$\boldsymbol{2\pi}$	$\boldsymbol{\pi}$	$\boldsymbol{\pi/2}$

Possiamo ora proseguire, ricavando ad esempio

$$45° = \frac{1}{2}\cdot 90° \underset{\text{NOTA}}{=} \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

NOTA: il simbolo " = " non è qui del tutto rigoroso; ci concediamo una licenza! Non si tratta, infatti, di una vera uguaglianza, ma piuttosto di una **corrispondenza** fra due misure che sono numericamente diverse perché completamente diverse sono le unità di misura utilizzate: il grado (ampiezza) a 1° membro, e il radiante (lunghezza) a 2° membro.

$$30° = \frac{1}{3}\cdot 90° = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$60° = \frac{1}{3}\cdot 180° = \frac{1}{3}\cdot\pi = \frac{\pi}{3} \qquad \left(\text{oppure } 60° = 2\cdot 30° = 2\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}\right)$$

$$120° = 2\cdot 60° = 2\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi \qquad 135° = 3\cdot 45° = 3\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$$

$$40° = 2\cdot 20° = 2\cdot\frac{1}{9}\cdot 180° = 2\cdot\frac{1}{9}\pi = \frac{2}{9}\pi \qquad 75° = \frac{1}{2}\cdot 150° = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 30° = \frac{5}{2}\cdot 30° = \frac{5}{2}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{5}{12}\pi$$

$$\boxed{\mathbf{1° = \frac{1}{180}\cdot 180° = \frac{1}{180}\pi = \frac{\pi}{180}}} \qquad 111° = 111\cdot 1° = 111\cdot\frac{\pi}{180} = \frac{\cancel{111}^{37}}{\cancel{180}_{60}}\pi$$

Negli esercizi (e in talune applicazioni) compaiono con particolare frequenza gli **angoli multipli di 30° e di 45°.**
Ecco la **tabella dei corrispondenti valori in radianti**:

Gradi	Rad.	Gradi	Rad.	Gradi	Rad.	Gradi	Rad.	Gradi	Rad.
0°	0	90°	$\frac{\pi}{2}$	180°	π	270°	$\frac{3}{2}\pi$	360°	2π
30°	$\frac{\pi}{6}$	120°	$\frac{2}{3}\pi$	210°	$\frac{7}{6}\pi$	300°	$\frac{5}{3}\pi$	390°	$\frac{13}{6}\pi$
45°	$\frac{\pi}{4}$	135°	$\frac{3}{4}\pi$	225°	$\frac{5}{4}\pi$	315°	$\frac{7}{4}\pi$	405°	$\frac{9}{4}\pi$
60°	$\frac{\pi}{3}$	150°	$\frac{5}{6}\pi$	240°	$\frac{4}{3}\pi$	330°	$\frac{11}{6}\pi$	420°	$\frac{7}{3}\pi$

Gli angoli che superano i 360° sono quelli che "vanno oltre il giro completo". Si fa un giro (360°), poi si prosegue.

Più avanti parleremo pure di angoli negativi.

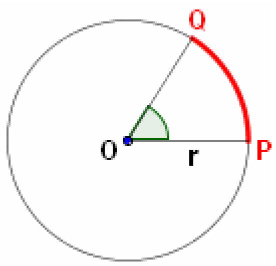
D'ora in poi, data la stretta corrispondenza fra "angolo" (pensato come "angolo al centro di una circonferenza") e "arco", **parleremo indifferentemente di "angolo" e di "arco", trattando questi due concetti come "equivalenti" ed "intercambiabili"**.
Di norma, quando si ragiona in "radianti" si preferisce dire "arco", quando si usano i "gradi", "angolo".

Abbiamo visto sopra che l'angolo di 1 grado misura, in radianti, $\pi/180$ ossia circa 0.01745.

Quanto misurerà, in gradi, l'arco di 1 radiante?

Possiamo rispondere mediante la proporzione
$1:\pi = x°:180°$ da cui
misura in gradi dell'arco di 1 radiante =

$$= \frac{180°}{\pi} = \frac{180°}{3.14159...} \approx \mathbf{57.3° = 57°18'}$$



La misura trovata, poco più di 57°, è del tutto "convincente" dato che l'arco di 1 radiante è poi l'arco il quale, se rettificato, darebbe luogo a un segmento uguale al raggio (vedi figura qui a fianco, nella quale è appunto $\overset{\frown}{PQ} = 1$ radiante).

E COME SI PASSA, IN GENERALE, DAI GRADI AI RADIANTI E VICEVERSA?

DAI GRADI AI RADIANTI

$$\boxed{x_{rad} : \pi = x° : 180° \ \rightarrow\ x_{rad} = \frac{\pi\cdot x°}{180°} = \frac{x°}{180°}\cdot\pi}$$

Si prende dunque la misura, es. $72°\,32'$, la si trasforma in "gradi virgola …": $72°\,32' = 72.533333...°$ poi si divide per 180 e si moltiplica per π :

$$72°\,32' = 72.5333...° = \frac{72.5333...}{180}\cdot\pi\ rad = 1.2659...\ rad$$

La sigla *rad* viene di norma omessa.

DAI RADIANTI AI GRADI

$$\boxed{x_{rad} : \pi = x° : 180° \ \rightarrow\ x° = \frac{x_{rad}\cdot 180°}{\pi} = \frac{x_{rad}}{\pi}\cdot 180°}$$

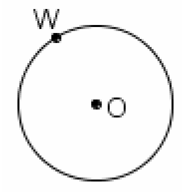
Si prende la misura in radianti, es. 2.493 la si divide per π e si moltiplica per 180:

$$2.493\ radianti\ \rightarrow\ \frac{2.493}{\pi}\cdot 180° = 142.838...°$$

Naturalmente, volendo, questi "gradi virgola …" possono poi essere trasformati in gradi, primi e secondi.

ESERCIZI

1) a) A partire dal punto W disegna:
   - in senso antiorario, un arco di 3 radianti
   - e in senso orario, uno di 0.8 radianti.



   b) Quanti radianti misura l'intera circonferenza? Perché?
   c) E 1/16 di circonferenza, quanti radianti misura?

2) Ricordando che π corrisponde a 180° (perché? …)
   I) trova le misure in gradi dei seguenti angoli espressi in radianti:
   a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{5}{6}\pi$ c) $\frac{3}{4}\pi$ d) $\frac{1}{90}\pi$ e) $\frac{3}{2}\pi$ f) $\frac{5}{3}\pi$ g) $\frac{6}{5}\pi$ h) 3 radianti i) 2.2 rad l) 0.8 rad
   II) trova le misure in radianti di un angolo di:
   a) 50° b) 36° c) 210° d) 225° e) 20° f) 330° g) 140°

3) π *radianti* $\leftrightarrow 180°$ da cui la proporzione fondamentale $x_{rad} : \pi = x° : 180°$.

   I) Completa ora le formule: $x_{rad} = \frac{\cdots}{\cdots} \cdot \pi$; $x° = \frac{\cdots}{\cdots} \cdot 180°$
   II) Trasforma da gradi-primi-secondi a radianti (approssimando a 2 cifre decimali), e viceversa:
   a) $141° = \ldots$ *rad* b) 1.2 *rad* $= \ldots °$ c) $14°15' = (\,\ldots..\,)° = \ldots$ *rad* d) $2{,}45$ *rad* $= \ldots °$
   e) $24° = \ldots$ *rad* f) $55° = \ldots$ *rad* g) $11°\,30' = \ldots$ *rad* h) $95°\,20' = \ldots$ *rad*
   i) $137°\,6' = \ldots$ *rad* l) $1{,}42$ *rad* $= \ldots °$ m) 0.4 *rad* $= \ldots °$ n) $200{,}5° = \ldots$ *rad*

4) Data la lunghezza del raggio e l'ampiezza dell'angolo, determina la lunghezza dell'arco
   a) $r = 3.7$ km; $\alpha = 48°$ b) $r = 4$ cm; $\alpha = 22°45'$

5) Data la lunghezza dell'arco e il raggio, trova l'angolo al centro corrispondente in gradi e in primi.
   a) $\ell = 5.4$; $r = 12$ b) $\ell = 0.154$; $r = 0.245$

6) Un arco è lungo cm 4.7, ed è sotteso da un angolo al centro di 23.4°.
   Quanto misura il raggio della circonferenza?

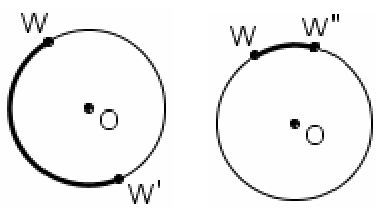
7) Un arco è lungo m 0.03, ed è sotteso da un angolo al centro di 2°.
   Quanto misura il raggio della circonferenza?

8) In un cerchio di raggio 4.5 metri, quanto è lungo un arco di 2 radianti?
   In un cerchio di raggio 4.5 metri, quanto è lungo un arco di 2°?
   In un cerchio di raggio 2 m, quanto è lungo un arco di $25°\,30'$?

9) In una circonferenza di diametro 4 metri, che angolo al centro corrisponde a un arco lungo 1 metro?
   Esprimi la risposta in gradi, primi e secondi.

Puoi trovare altri esercizi di questo tipo, e dei tipi successivi, su ⇨

RISPOSTE



1) a) Vedi figura (il triplo del raggio; 0.8 volte il raggio = gli 8/10 del raggio)
   b) 2π, perché è uguale a 2π volte il raggio c) $2\pi \cdot \frac{1}{16} = \frac{\pi}{8} \approx 0.39$

2) I) a) 60° b) 150° c) 135° d) 2° e) 270° f) 300° g) 216°
   h) Proporzione: $3 : \pi = x° : 180°$ da cui $x° = \frac{3 \cdot 180°}{\pi} \approx 171.9°$
   i) $2.2 \cdot 180°/\pi \approx 126.1°$ l) $0.8 \cdot 180°/\pi \approx 45.8° = 45°48'$
   II) a) $\frac{5}{18}\pi$ b) $\frac{\pi}{5}$ c) $\frac{7}{6}\pi$ d) $\frac{5}{4}\pi$ e) $\frac{\pi}{9}$ f) $\frac{11}{6}\pi$ g) $\frac{7}{9}\pi$

3) I) $x_{rad} = \frac{x°}{180°} \cdot \pi$; $x° = \frac{x_{rad}}{\pi} \cdot 180°$
   II) a) 2.46 *rad* b) $68°\,45'\,18''$ c) $14°15' = 14.25° \approx 0.25$ *rad* d) $140°\,22'\,29''$ e) 0.42 *rad*
   f) 0.96 *rad* g) 0.20 *rad* h) 1.66 *rad* i) 2.39 *rad* l) $81°\,21'\,36''$ m) $22°\,55'\,6''$ n) 3.50 *rad*

4) a) Circa 3.10 km b) Circa 1.59 cm 5) a) $\approx 25°\,47'$ b) $\approx 36°\,1'$

6) $\approx$ cm 11.5 7) $\approx$ m 0.86 8) m 9; $\approx$ m 0.157; ≈ 0.89 m 9) $\approx 28°\,38'\,52''$