3. CIRCONFERENZA GONIOMETRICA

Ora andremo a **RIDEFINIRE**, da un punto di vista ben più generale rispetto al paragrafo 1, le "**funzioni angolari**" **SENO**, **COSENO** e **TANGENTE**.

Le definizioni che daremo si riferiranno ad angoli qualsiasi, anche maggiori o uguali a 90°, anche maggiori di 360°, anche nulli o negativi, e tuttavia saranno perfettamente EQUIVALENTI, per gli angoli acuti, a quelle con cui abbiamo in precedenza avviato il discorso.

L'equivalenza fra definizioni "vecchie" e definizioni "nuove" verrà rigorosamente dimostrata in un paragrafo dedicato ai "teoremi sui triangoli rettangoli".

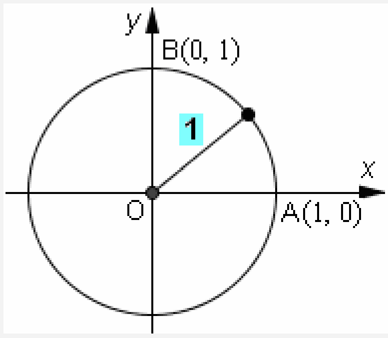
Lo studio delle funzioni angolari (ossia di quelle quantità, come il seno, il coseno e la tangente, il cui valore dipende dall'ampiezza di un angolo - o, in modo equivalente, dalla misura di un arco) viene chiamato "**GONIOMETRIA**" (in greco, **gonos = angolo** e **metron = misura**) oppure "**TRIGONOMETRIA**", termine che è praticamente un sinonimo di "goniometria" ma mette maggiormente in rilievo il fatto che, molto sovente, interessa applicare le formule studiate ai tre angoli interni di un *triangolo*.

Lo strumento concettuale che è posto alla base della goniometria è la "**circonferenza goniometrica**".

Cos'è, dunque, la "**CIRCONFERENZA GONIOMETRICA**"?

E' una circonferenza

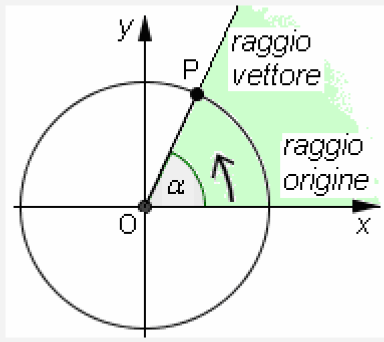
- **avente il centro nell'origine di un sistema di assi cartesiani**
- **e (importantissimo!) RAGGIO UGUALE A 1**
  (cioè, raggio uguale all'unità di misura del sistema di riferimento).



S'intende che sulla circonferenza goniometrica gli ANGOLI vadano sempre riportati

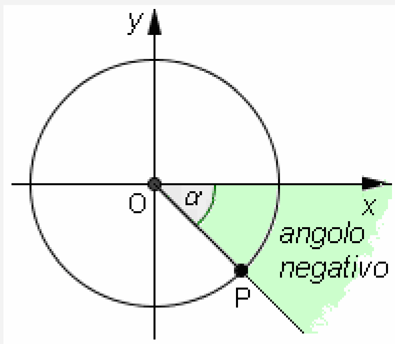
- **con vertice nel centro (= nell'origine)**
- **a partire dal semiasse delle ascisse positive**
  (che sarà dunque sempre il "primo lato" dell'angolo)
- **e in SENSO ANTIORARIO ↺.**

Il "primo lato" dell'angolo, ossia il semiasse delle ascisse positive, viene anche detto "**raggio origine**" dell'angolo, mentre il secondo lato (semiretta OP nella figura) è detto "**raggio vettore**".



Agli angoli riportati in senso ORARIO si assegna MISURA NEGATIVA:

ad esempio,
l'angolo qui a fianco raffigurato misurerà $-45°$
(oppure, in radianti, $-\frac{\pi}{4}$).

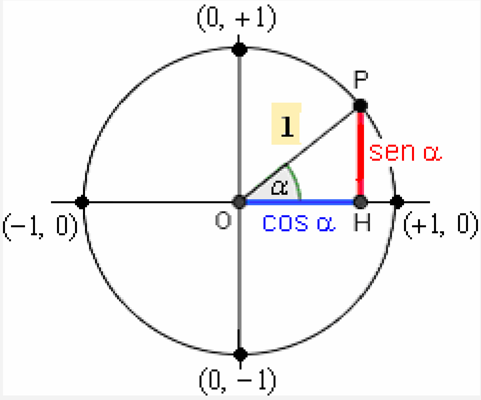


4. SENO E COSENO DI UN ANGOLO NELLA CIRCONFERENZA GONIOMETRICA

Nella circonferenza goniometrica, consideriamo un certo angolo α
(che di norma sarà compreso fra 0° e 360°, ma potrebbe pure essere negativo, o maggiore di 360°):
cosa intendiamo per "seno di α ($\operatorname{sen}\alpha$)" e per "coseno di α ($\cos\alpha$)" ?

Andiamo a considerare il punto P in cui il raggio vettore di α interseca la circonferenza goniometrica:

♪ **il SENO di α è, per definizione, l'ORDINATA di P,**
♫ **mentre il COSENO di α è, per definizione, l'ASCISSA di P.**



sen α = ordinata di P = misura (con segno) di HP
cos α = ascissa di P = misura (con segno) di OH

La circonferenza goniometrica ha, come abbiamo detto, centro nell'origine e raggio 1; quindi i suoi punti hanno

- ascissa che può andare da un minimo di -1 a un max di $+1$;
- ordinata che può andare, anch'essa, da un minimo di -1 a un massimo di $+1$.

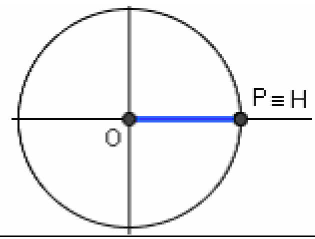
Pertanto **il seno e il coseno di un angolo α sono sempre compresi fra -1 e $+1$**:

$$\boxed{\forall\alpha,\quad -1\le \operatorname{sen}\alpha\le 1 \quad -1\le\cos\alpha\le 1}$$

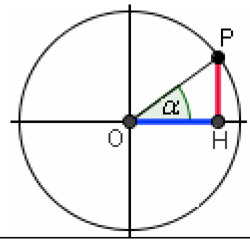
Si ha subito (Pitagora) la **1ª RELAZIONE FONDAMENTALE DELLA GONIOMETRIA**: qualunque sia l'angolo α (anche, eventualmente, con $\alpha>360°$, o $\alpha<0°$), è sempre

$\boxed{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1}$ NOTA: $\operatorname{sen}^2\alpha$, $\cos^2\alpha$ sono scritture abbreviate di: $(\operatorname{sen}\alpha)^2$, $(\cos\alpha)^2$

Per $\alpha=0°$ (0 radianti)
$\operatorname{sen}\alpha=0;\ \cos\alpha=1$



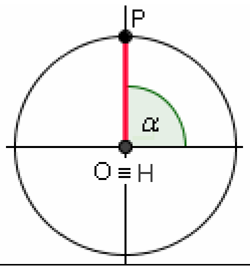
Nel $\boxed{1°\text{ quadrante}}$, ossia per $0°<\alpha<90°$ $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$, è $\boxed{\operatorname{sen}\alpha>0,\ \cos\alpha>0}$



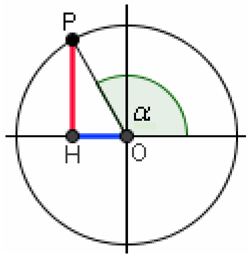
… e quando α cresce da 0° a 90°,

sen α cresce (da 0 a 1)
cos α decresce (da 1 a 0)

Per $\alpha=90°$ ($\pi/2$ radianti)
$\operatorname{sen}\alpha=1;\ \cos\alpha=0$



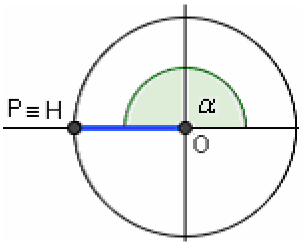
Nel $\boxed{2°\text{ quadrante}}$, ossia per $90°<\alpha<180°$ $\left(\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$, è $\boxed{\operatorname{sen}\alpha>0,\ \cos\alpha<0}$



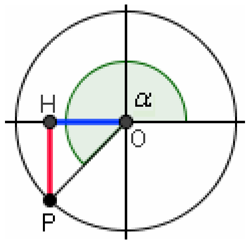
… e quando α cresce da 90° a 180°,

sen α decresce (da 1 a 0)
cos α decresce (da 0 a -1)

Per $\alpha=180°$ (π radianti)
$\operatorname{sen}\alpha=0;\ \cos\alpha=-1$



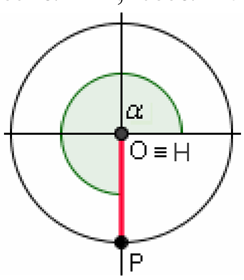
Nel $\boxed{3°\text{ quadrante}}$, ossia per $180°<\alpha<270°$ $\left(\pi<\alpha<\dfrac{3}{2}\pi\right)$, è $\boxed{\operatorname{sen}\alpha<0,\ \cos\alpha<0}$



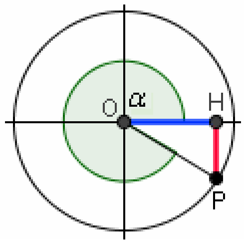
… e quando α cresce da 180° a 270°,

sen α decresce (da 0 a -1)
cos α cresce (da -1 a 0)

Per $\alpha=270°$ $\left(\dfrac{3}{2}\pi\text{ radianti}\right)$
$\operatorname{sen}\alpha=-1;\ \cos\alpha=0$



Nel $\boxed{4°\text{ quadrante}}$, ossia per $270°<\alpha<360°$ $\left(\dfrac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi\right)$, è $\boxed{\operatorname{sen}\alpha<0,\ \cos\alpha>0}$

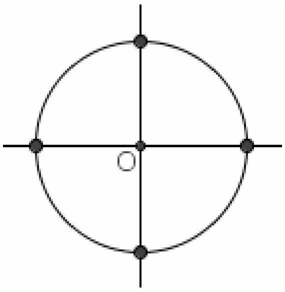


… e quando α cresce da 270° a 360°,
sen α cresce (da -1 a 0)
cos α cresce (da 0 a 1)

Quando α raggiunge e poi supera i 360°, i valori di sen α e di cos α "ripartono come se si ripartisse da 0°"; cioè, **le funzioni "seno" e "coseno" sono "periodiche di periodo 360°"**. Ne riparleremo.

Clicca QUI ⇨ per una bella figura "dinamica" (GeoGebra) sulla variazione di seno e coseno al variare dell'arco

ESERCIZI



1) Nella circonferenza goniometrica in figura

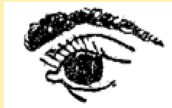
I) scrivi la coppia delle coordinate di ciascuno dei cinque punti evidenziati

II) disegna: a) l'angolo di 135°; b) quello che misura $\frac{7}{6}\pi$; c) quello di $-80°$

III) e disegna inoltre una coppia di angoli fra loro complementari: α e $90°-\alpha$ (potrebbero essere, ad esempio, 25° e 65° …) per constatare un fatto importante, che vale poi per qualsiasi valore di α, anche maggiore di 90° o di 180° o di 360°, anche negativo: si ha sempre

$\boxed{\mathbf{sen(90°-\alpha)=cos\,\alpha}}$ e $\boxed{\mathbf{cos(90°-\alpha)=sen\,\alpha}}$

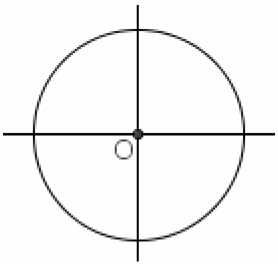
PASSANDO DA UN ANGOLO AL SUO COMPLEMENTARE, I VALORI DI SENO E COSENO SI SCAMBIANO FRA LORO.



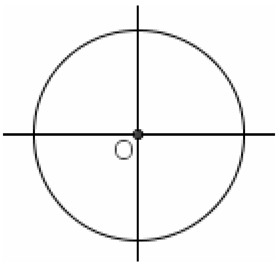
2) Sapendo che $sen\,43° \approx 0.68$, $cos\,43° \approx 0.73$, riempi i puntini: $sen\,47° \approx ...$, $cos\,47° \approx ...$

3) a) Noto il valore $sen\,\alpha$ del seno di un angolo, ci sono due modi per ricavare $cos\,\alpha$. Quali?
   b) Determina: il coseno di un angolo ottuso il cui seno vale 0.39
   c) Determina il seno di un angolo acuto il cui coseno vale 0.14

4) Quali sono gli angoli, compresi fra 0° e 360°,
   a) il cui seno è uguale a 0? b) il cui coseno è uguale a 0? c) il cui seno è uguale a 1?
   d) il cui coseno è uguale a 1? e) il cui seno è uguale a -1? f) il cui coseno è uguale a -1?
   g) il cui seno è uguale al coseno? h) il cui seno è l'opposto del coseno?
   i) Se un angolo α compreso fra 0° e 360° ha coseno <0, in quale intervallo di ampiezze può trovarsi?

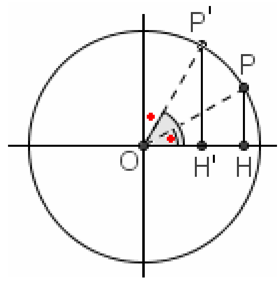


5)
$sen\,122°$ è: a) >0 b) <0 c) $=0$ d) $=+1$ e) $=-1$
$cos\,122°$ è: a) >0 b) <0 c) $=0$ d) $=+1$ e) $=-1$
$sen\,180°$ è: a) >0 b) <0 c) $=0$ d) $=+1$ e) $=-1$
$cos\,180°$ è: a) >0 b) <0 c) $=0$ d) $=+1$ e) $=-1$
$sen\,214°$ è: a) >0 b) <0 c) $=0$ d) $=+1$ e) $=-1$
$cos\,214°$ è: a) >0 b) <0 c) $=0$ d) $=+1$ e) $=-1$
$sen\,270°$ è: a) >0 b) <0 c) $=0$ d) $=+1$ e) $=-1$
$cos\,270°$ è: a) >0 b) <0 c) $=0$ d) $=+1$ e) $=-1$
$sen\,355°$ è: a) >0 b) <0 c) $=0$ d) $=+1$ e) $=-1$
$cos\,355°$ è: a) >0 b) <0 c) $=0$ d) $=+1$ e) $=-1$



6) Utilizzando una matita e una circonf. goniometrica, individua la risposta corretta:
$sen(\alpha+180°)=?$ a) $sen\,\alpha$ b) $cos\,\alpha$ c) $-sen\,\alpha$ d) $-cos\,\alpha$
$sen(180°-\alpha)=?$ a) $sen\,\alpha$ b) $cos\,\alpha$ c) $-sen\,\alpha$ d) $-cos\,\alpha$
$sen(90°-\alpha)=?$ a) $sen\,\alpha$ b) $cos\,\alpha$ c) $-sen\,\alpha$ d) $-cos\,\alpha$
$sen(90°+\alpha)=?$ a) $sen\,\alpha$ b) $cos\,\alpha$ c) $-sen\,\alpha$ d) $-cos\,\alpha$
$sen(-\alpha)=?$ a) $sen\,\alpha$ b) $cos\,\alpha$ c) $-sen\,\alpha$ d) $-cos\,\alpha$
$cos(180°-\alpha)=?$ a) $sen\,\alpha$ b) $cos\,\alpha$ c) $-sen\,\alpha$ d) $-cos\,\alpha$

RISPOSTE



1) III) In effetti, nella figura qui a destra, si ha: $P\hat{O}H=\alpha$, $P'\hat{O}H'=90°-\alpha$,
$PH = sen\,\alpha$, $OH = cos\,\alpha$, $P'H' = sen(90°-\alpha)$, $OH' = cos(90°-\alpha)$
e si può osservare (e dimostrare) che è $P'H' = OH$, $OH' = PH$

2) $sen\,47° = cos(90°-47°) = cos\,43° \approx 0.73$
$cos\,47° = sen(90°-47°) = sen\,43° \approx 0.68$

3) a) Primo modo: $cos\,\alpha = \pm\sqrt{1-sen^2\,\alpha}$ *dove il segno dev'essere deciso in base all'ampiezza dell'angolo*
Secondo modo: con la macchinetta, risalire dal seno all'angolo (tasto sen^{-1}), poi calcolare il coseno (cos)
b) ≈ -0.92 c) ≈ 0.99

4) a) 0°, 180°, 360° b) 90°, 270° c) 90° d) 0°, 360° e) 270°
f) 180° g) 45°, 225° h) 135°, 315° i) $90° < \alpha < 270°$

5) $sen\,122° > 0$, $cos\,122° < 0$, $sen\,180° = 0$, $cos\,180° = -1$, $sen\,214° < 0$,
$cos\,214° < 0$, $sen\,270° = -1$, $cos\,270° = 0$, $sen\,355° < 0$, $cos\,355° > 0$

6) $sen(\alpha+180°) = -sen\,\alpha$, $sen(180°-\alpha) = sen\,\alpha$, $sen(90°-\alpha) = cos\,\alpha$,
$sen(90°+\alpha) = cos\,\alpha$, $sen(-\alpha) = -sen\,\alpha$, $cos(180°-\alpha) = -cos\,\alpha$