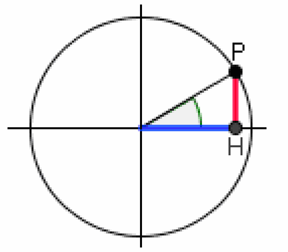
7. PERIODICITA' DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE

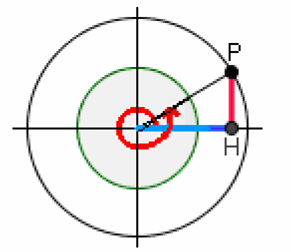
I VALORI DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE SENO, COSENO E TANGENTE "SI RIPETONO DOPO UN GIRO COMPLETO". Insomma:

sulla circonferenza goniometrica, un angolo di $30°$
"vale come un angolo di $30° + 360° = 390°$,
o come un angolo di $30° - 360° = -330°$"
dal punto di vista dei valori delle tre funzioni goniometriche.

a) $30°$

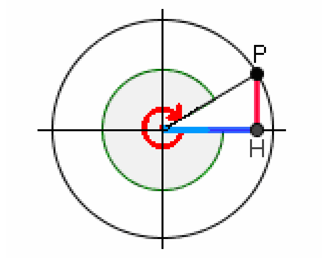


b) $30° + 360° = 390°$
Si prosegue, oltre l'angolo di 30°,
di un altro giro in senso ANTIORARIO …



… e il punto P ritorna NELLA STESSA POSIZIONE DI PRIMA!

c) $30° - 360° = -330°$
Da 30° si toglie,
ruotando in senso ORARIO,
un giro completo
(cioè, tutti i 30° poi altri 330°):
l'effetto è di ripartire
dal semiasse delle ascisse positive
ruotando di 330° in senso ORARIO …

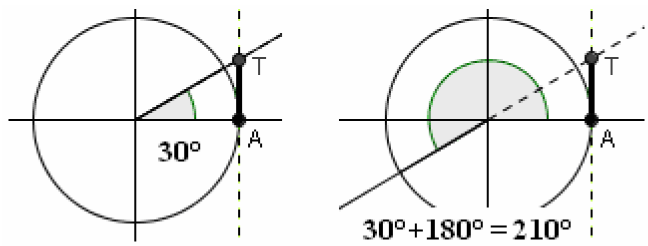


… e il punto P ritorna NELLA STESSA POSIZIONE DI PRIMA!

Più in generale, **prendendo un angolo α,
e aumentandolo, o anche diminuendolo, di un giro completo (= 360°)
o di un numero intero di giri completi (= un multiplo di 360°),
le tre funzioni goniometriche restano inalterate.**

**PER LA TANGENTE, ADDIRITTURA,
BASTA CHE L'ANGOLO α SUBISCA UN AUMENTO, O UNA DIMINUZIONE,
ANCHE SOLO DI "MEZZO GIRO" (= 180°)
O DI UN MULTIPLO DI MEZZO GIRO (= UN MULTIPLO DI 180°),
PERCHÉ TALE FUNZIONE RESTI INVARIATA.**

La figura qui a fianco, ad esempio, mostra che la tangente non cambia se l'angolo subisce un aumento di 180°.



Questo ripetersi del valore di $sen\,\alpha$ e $cos\,\alpha$,
quando α aumenta o diminuisce di 360° o di un multiplo di 360°,
e questo ripetersi del valore di $tg\,\alpha$,
quando α aumenta o diminuisce di 180° o di un multiplo di 180°,
viene chiamato la "**PERIODICITÀ**".
Si dice che

- **LE FUNZIONI "SENO" E "COSENO" SONO PERIODICHE DI PERIODO 360°,**
- **LA FUNZIONE "TANGENTE" È PERIODICA DI PERIODO 180°.**

8. CALCOLATRICI E FUNZIONI GONIOMETRICHE

Come fa la calcolatrice tascabile a determinare i valori delle funzioni goniometriche, dirette e inverse?

La matematica mette a disposizione, per calcoli di questo tipo, le *formule di Maclaurin*.
Colin Maclaurin o Mac Laurin, 1698-1746, fu un matematico scozzese. Eccole, queste fantastiche formule:

- ❑ $sen\,x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$
- ❑ $cos\,x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$
- ❑ $tg\,x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \ldots$

Il "punto esclamativo" indica il cosiddetto "**fattoriale**" di un intero: ad esempio,
$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ (*si legge*: "3 *fattoriale*"); $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
Queste "**somme di infiniti addendi**" (= "**serie**") a secondo membro approssimano il valore esatto con una precisione che cresce al crescere del numero di addendi presi in considerazione.

- ❑ Inversa del seno (dal seno y fa tornare all'angolo x espresso in radianti, e compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$):

$$x = sin^{-1}(y) = arc\,sen\,y = y + \frac{1}{2}\frac{y^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{y^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{y^7}{7} + \ldots \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$$

Si legge "arco seno di y" (significa, essenzialmente: "il più semplice fra gli archi aventi per seno y ")

- ❑ Inversa del coseno:

$$x = cos^{-1}(y) = arc\,cos\,y = \frac{\pi}{2} - arc\,sen\,y = \frac{\pi}{2} - y - \frac{1}{2}\frac{y^3}{3} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{y^5}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{y^7}{7} - \ldots \qquad (0 \le x \le \pi)$$

- ❑ Inversa della tangente: $x = tg^{-1}(y) = arc\,tg\,y = y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + \ldots \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$

Per testare la correttezza di queste formule, prova tu stesso a prendere, ad esempio,
la formula per $sen\,x$ e ad applicarla nel caso dell'angolo di 30°.

Prima di tutto dovrai passare ai radianti ottenendo, per l'angolo in gioco, 0.5236 *rad* (valore arrotondato).
Poi porrai $x = 0.5236$ e considererai, ad esempio, i primi 3 termini, eseguendo il calcolo.

Otterrai un valore che in piccola parte dipenderà anche dagli arrotondamenti eseguiti nei vari passaggi dallo strumento di calcolo di cui ti sei servito, ma che comunque dovrebbe essere vicino a 0.500003193, numero che differisce di pochissimo da quello che è il VERO seno di 30° ossia, come è noto, esattamente $1/2 = 0.5$.

Prendendo un numero maggiore di termini (e partendo da una misura in radianti affetta da un errore di arrotondamento più piccolo) il valore ottenuto sarebbe ancora più preciso.

Bene! Certe calcolatrici del passato, quando si digitava la misura di un angolo per poi pigiare il tasto della funzione *sin* , facevano proprio questo lavoro, di trasformare eventualmente i gradi in radianti ed eseguire la rispettiva formula di Maclaurin, con un numero di termini adeguato alla precisione che lo strumento poteva raggiungere. In realtà, dopo aver introdotto il discorso in questo modo per dare un'idea del *modus operandi* di una calcolatrice, dobbiamo dire che gli algoritmi più utilizzati per il calcolo automatico delle funzioni goniometriche sono *altri*, soprattutto il **metodo CORDIC**, di cui non ci possiamo qui occupare.

LE VARIANTI DELLA SIMBOLOGIA (SUI LIBRI, SUI COMPUTER, SULLE CALCOLATRICI)

a) Accade che, su certi libri di testo o sui tasti delle calcolatrici,
si incontrino leggére variazioni dei simboli da noi scelti:
ad esempio, al posto di **sen *x*** puoi trovare **sin *x***, al posto di **tg *x*** puoi trovare **tan *x***.
A volte, poi, viene usata una parentesi dove noi non l'abbiamo invece messa: **sen (*x*), cos (*x*)** ecc.

Analogamente per le funzioni goniometriche inverse:
- al posto di **arc sen** puoi trovare **arc sin** o anche **sen⁻¹** o **sin⁻¹**
- al posto di **arc cos** puoi trovar scritto **cos⁻¹**
- al posto di **arc tg** puoi trovar scritto **arc tan** o anche **tan⁻¹**

Il " −1 " fa da PSEUDO-esponente: non significa qui "fare il reciproco", bensì "applicare la funzione inversa"

b) Occhio quando usi la **calcolatrice tascabile**, alla questione dei *radianti* e dei *gradi*!
Se vuoi calcolare, ad esempio, il seno dell'angolo di 2°,
devi controllare che la macchinetta sia impostata sui "gradi" e non sui "radianti".
C'è comunque **sempre un tasto, o una successione di tasti, che consente il passaggio dall'impostazione "in gradi" a quella "in radianti" e viceversa**.

♥ E in ogni caso, tramite la proporzione $\boxed{x_{rad} : \pi = x^\circ : 180^\circ}$
è ben facile transitare fra la misura di un arco in gradi e la misura dello stesso arco in radianti:

dai gradi ai radianti $\boxed{x_{rad} =} \frac{\pi \cdot x^\circ}{180^\circ} = \boxed{\frac{x^\circ}{180^\circ} \cdot \pi}$; **dai radianti ai gradi** $\boxed{x^\circ =} \frac{x_{rad} \cdot 180^\circ}{\pi} = \boxed{\frac{x_{rad}}{\pi} \cdot 180^\circ}$