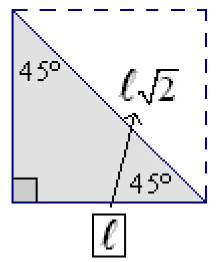
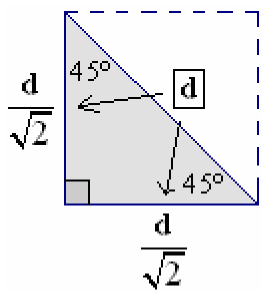
9. ALCUNE FORMULE UTILI

I valori delle funzioni goniometriche (seno, coseno, tangente) degli angoli multipli di 30° o di 45° si possono trovare utilizzando le formule qui sotto riportate (facilmente ottenibili con semplici considerazioni di geometria elementare e utilizzando il T. di Pitagora). Esse permettono, nei cosiddetti "triangoli rettangoli particolari"(=quelli con gli angoli acuti di 30° e 60°, o di 45°), di ricavare tutti i lati conoscendo uno solo di essi.

In un TRIANGOLO RETTANGOLO CON GLI ANGOLI ACUTI DI 45°
(che può essere visto come la metà di un quadrato):

- **L'IPOTENUSA E' UGUALE AL CATETO MOLTIPLICATO $\sqrt{2}$**
- **IL CATETO E' UGUALE ALL'IPOTENUSA DIVISO $\sqrt{2}$**





Ricordiamo che
$\sqrt{2} = 1.414213... \approx 1.4$

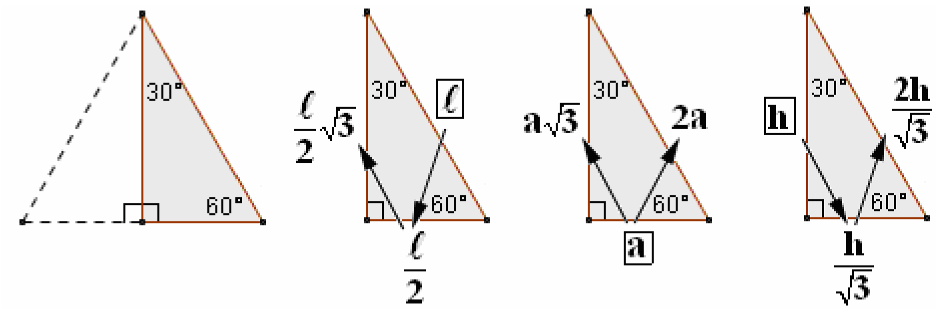
L'espressione $\frac{d}{\sqrt{2}}$ *viene di norma "razionalizzata":*

$$\boxed{\frac{d}{\sqrt{2}}} = \frac{d}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{d\sqrt{2}}{2}}$$

Scrivendo $\frac{d}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{d\sqrt{2}}{2}$ noi *non abbiamo alterato il valore* dell'espressione di partenza $d/\sqrt{2}$, perché l'abbiamo moltiplicata per 1 ! L'abbiamo invece "razionalizzata", cioè *ci siamo liberati della radice a denominatore*, ritenuta per varie ragioni fastidiosa.

In un TRIANGOLO RETTANGOLO CON GLI ANGOLI ACUTI DI 30° e 60°
(che può essere visto come la metà di un triangolo equilatero):

- **IL CATETO MINORE E' META' DELL'IPOTENUSA**
  e quindi l'ipotenusa è il doppio del cateto minore
- **IL CATETO MAGGIORE E' UGUALE AL MINORE MOLTIPLICATO $\sqrt{3}$** e quindi:
  il cateto maggiore è uguale a metà ipotenusa moltiplicato $\sqrt{3}$
  mentre il cateto minore è uguale al cateto maggiore diviso $\sqrt{3}$)



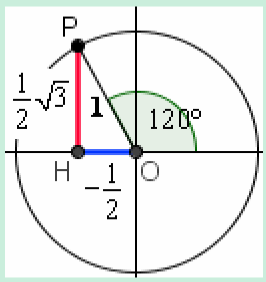
Ricordiamo che
$\sqrt{3} = 1.73205... \approx 1.7$

$$\boxed{\frac{h}{\sqrt{3}}} = \frac{h}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{h\sqrt{3}}{3}}$$

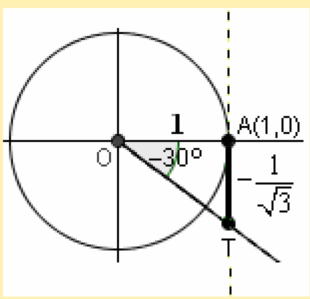
- **Quanto valgono sen 120° e cos 120°?**

Facciamo un disegnino e ricordiamo che il raggio della circonf. goniometrica vale 1.
I lati del triangolo rett. particolare OPH ($P\hat{O}H = 180° - 120° = 60°$) valgono dunque:
1 (l'ipotenusa OP); $\frac{1}{2}$ (il cateto minore OH); $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ (il cateto maggiore HP).

Allora avremo, tenendo conto dei segni: $\text{sen } 120° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\cos 120° = -\frac{1}{2}$



- **Quanto vale $\text{tg}(-30°)$?**

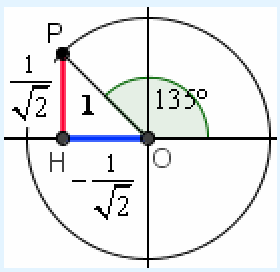


Questa volta il segmento noto è OA = raggio = 1.

Si trae subito, tenendo conto che T ha ordinata negativa, $\text{tg}(-30°) =$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

- **Quanto valgono seno e coseno di 135° ?**

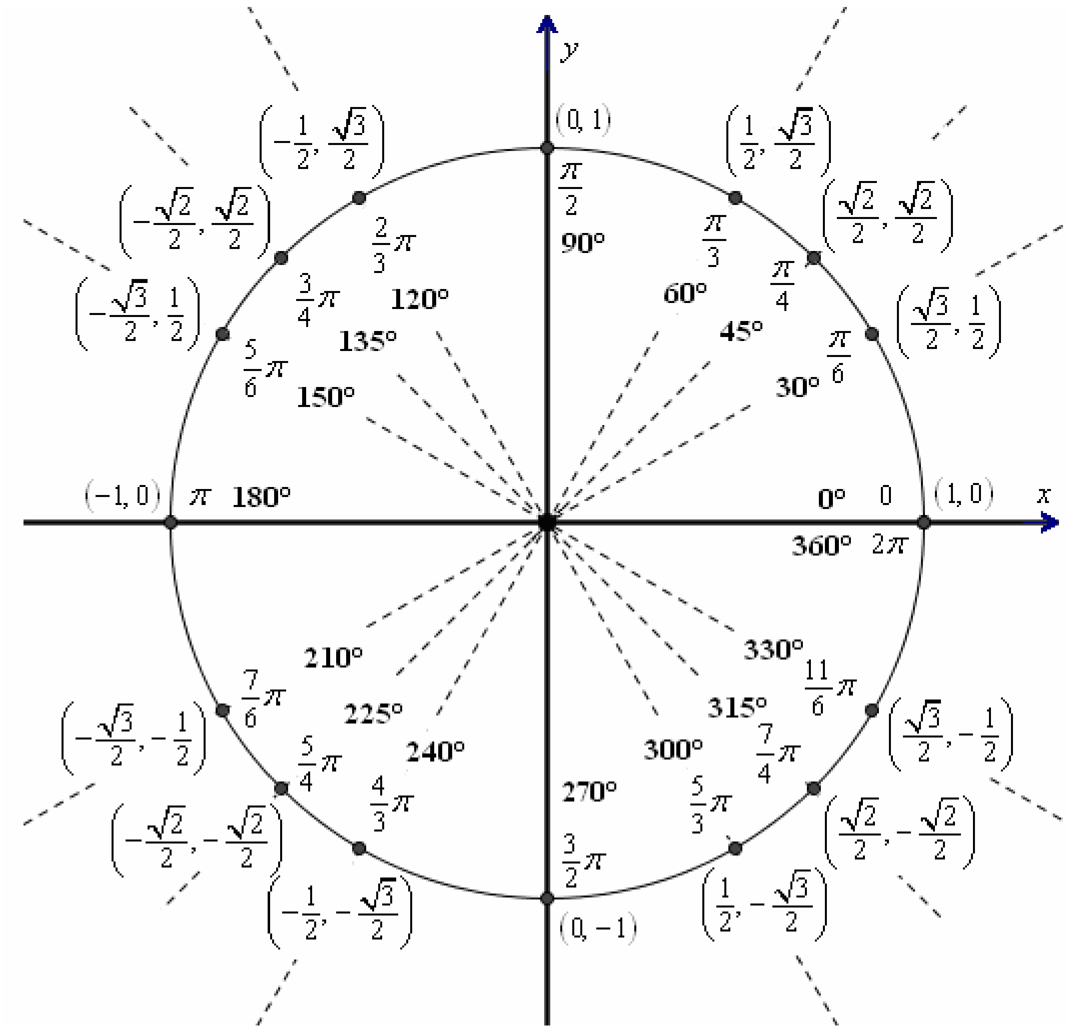


Il segmento noto è qui OP = raggio = 1.
Il triangolo rett. POH ha gli angoli acuti di 45°.
P ha ascissa negativa e ordinata positiva …

$$\text{sen } 135° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 135° = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

La seguente figura mostra i
VALORI DEL SENO E DEL COSENO DI ALCUNI ANGOLI "PARTICOLARI".



Il **coseno** è la 1ª coordinata, ossia l'**ascissa** del punto; il **seno** è la 2ª coordinata, ossia l'**ordinata**.

Tanto per fare un esempio: l'angolo di 120° ha come misura in radianti $\frac{2}{3}\pi$, e, dato che il punto associato è $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, risulta

$\cos 120° = \cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$

$\text{sen}\, 120° = \text{sen}\,\frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ESERCIZI (risposte a pag. 450)

Tenendo coperta la figura qui sopra ☺, determina i valori seguenti:

1) $\text{sen}\,30°$	2) $\cos 30°$	3) $\text{tg}\,30°$	4) $\text{sen}\,60°$	5) $\cos 60°$	6) $\text{tg}\,60°$
7) $\text{sen}\,45°$	8) $\cos 45°$	9) $\text{tg}\,45°$	10) $\text{sen}\,120°$	11) $\cos 120°$	12) $\text{tg}\,120°$
13) $\text{sen}\,150°$	14) $\cos 150°$	15) $\text{tg}\,150°$	16) $\text{sen}\,135°$	17) $\cos 135°$	18) $\text{tg}\,135°$
19) $\text{sen}\,0°$	20) $\cos 0°$	21) $\text{sen}\,90°$	22) $\cos 90°$	23) $\text{sen}\,180°$	24) $\cos 180°$
25) $\text{sen}\,225°$	26) $\cos 225°$	27) $\text{tg}\,225°$	28) $\text{sen}\,210°$	29) $\cos 210°$	30) $\text{tg}\,210°$
31) $\text{sen}\,240°$	32) $\cos 240°$	33) $\text{tg}\,240°$	34) $\text{sen}\,270°$	35) $\cos 270°$	36) $\text{tg}\,270°$
37) $\cos 270°$	38) $\text{sen}\,315°$	39) $\cos 315°$	40) $\text{sen}\,(-60°)$	41) $\cos 300°$	42) $\text{tg}\,330°$
43) $\text{tg}\,\pi$	44) $\text{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$	45) $\text{sen}\,\frac{\pi}{6}$	46) $\cos\frac{2}{3}\pi$	47) $\text{tg}\,\frac{5\pi}{2}$	48) $\text{sen}\,\frac{5}{4}\pi$
49) $\cos\frac{9}{4}\pi$	50) $\text{tg}\,780°$	51) $\text{sen}\,630°$	52) $\text{tg}\,\frac{11}{6}\pi$	53) $\text{sen}\,\frac{7}{6}\pi$	54) $\cos\frac{5}{3}\pi$

Stabilisci quali sono, nell'ambito del **primo giro ($0° \le x \le 360°$)**,
le soluzioni delle seguenti equazioni goniometriche (scrivi le soluzioni in **gradi**).

55) $\text{sen}\,x = \frac{1}{2}$	56) $\text{sen}\,x = -\frac{1}{2}$	57) $\cos x = \frac{1}{2}$	58) $\cos x = -\frac{1}{2}$
59) $\text{tg}\,x = -1$	60) $\text{sen}\,x = 0$	61) $\cos x = 0$	62) $\text{tg}\,x = 0$
63) $\text{sen}\,x = \cos x$	64) $\text{tg}\,x = -\sqrt{3}$	65) $\cos x = \sqrt{2}/2$	66) $\text{sen}\,x + \cos x = 0$

RISPOSTE agli esercizi di pag. 449

1) $\frac{1}{2}$	2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$	3) $\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$	5) $\frac{1}{2}$	6) $\sqrt{3}$
7) $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	8) $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	9) 1	10) $\frac{\sqrt{3}}{2}$	11) $-\frac{1}{2}$	12) $-\sqrt{3}$
13) $\frac{1}{2}$	14) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$	15) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$	16) $\frac{\sqrt{2}}{2}$	17) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$	18) -1
19) 0	20) 1	21) 1	22) 0	23) 0	24) -1
25) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$	26) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$	27) 1	28) $-\frac{1}{2}$	29) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$	30) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
31) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$	32) $-\frac{1}{2}$	33) $\sqrt{3}$	34) -1	35) 0	36) non esiste
37) 0	38) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$	39) $\frac{\sqrt{2}}{2}$	40) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$	41) $\frac{1}{2}$	42) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
43) 0	44) -1	45) $\frac{1}{2}$	46) $-\frac{1}{2}$	47) non esiste	48) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
49) $\frac{\sqrt{2}}{2}$	50) $\sqrt{3}$	51) -1	52) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$	53) $-\frac{1}{2}$	54) $\frac{1}{2}$

55) $x=30°,\ \ x=150°$
56) $x=210°,\ \ x=330°$
57) $x=60°,\ \ x=300°$
58) $x=120°,\ \ x=240°$
59) $x=135°,\ \ x=315°$
60) $x=0°,\ \ x=180°,\ \ x=360°$
61) $x=90°,\ \ x=270°$
62) $x=0°,\ \ x=180°,\ \ x=360°$
63) $x=45°,\ \ x=225°$
64) $x=120°,\ \ x=300°$
65) $x=45°,\ \ x=315°$
66) $x=135°,\ \ x=315°$

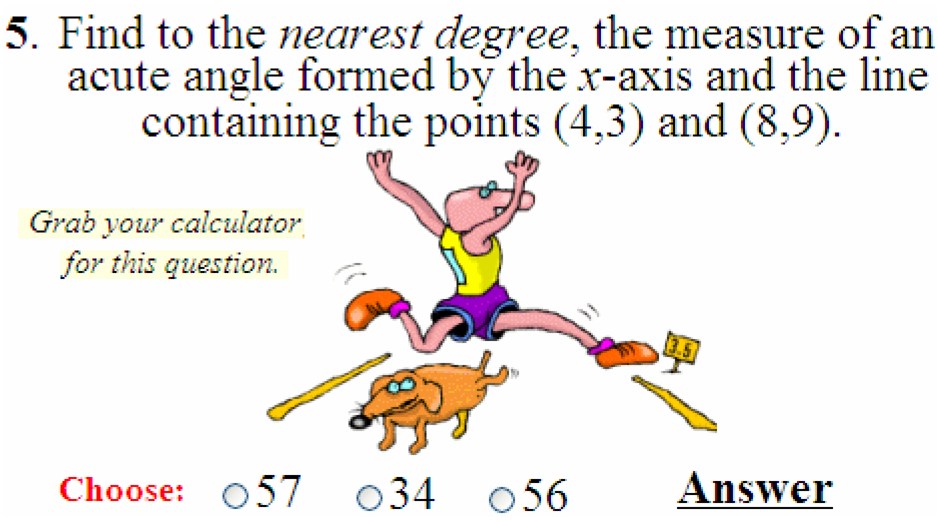


Immagine a fianco:
da www.regentsprep.org/

RISPOSTE agli esercizi di pag. 445

1) $DE=\frac{24}{5}\text{ cm}=4.8\text{ cm},\ \ DF=6\text{ cm},\ \ DG=5\text{ cm}$ 2) a) $WI=4,\ \ HI=7.5$ b) per $\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{25}{16}=1.5625$

3) Sono simili:

- A e C , perché hanno gli angoli rispettivamente uguali! 1° Criterio di similitudine.
  Infatti in A un angolo misura 50° e gli altri due, essendo uguali fra loro in quanto A è isoscele perché ha due lati entrambi di 2 cm, misureranno $(180°-50°)/2=65°$;
  e gli angoli di C misurano 65°, 65°, $180°-65°-65°=50°$
- B e D , in quanto hanno due lati proporzionali e gli angoli compresi uguali perché entrambi di 90°: 2° Criterio di similitudine.
- E e F, perché hanno i lati in proporzione: 3° Criterio.
  Ciascun lato di F è infatti il doppio del lato che gli corrisponde in E.

4) Il perimetro di A'B'C' è i 4/3 di quello di ABC; l'area di A'B'C' è i 16/9 dell'area di ABC.