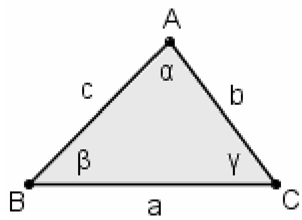
10. TEOREMI SUI TRIANGOLI RETTANGOLI

Questi teoremi mostrano che le definizioni di seno, coseno e tangente date all'inizio del capitolo, coi triangoli rettangoli, vanno d'accordo con le definizioni successive, quelle basate sulla circonferenza goniometrica.

Adotteremo di preferenza, quando possibile, la **SIMBOLOGIA STANDARD** illustrata dalla figura qui a fianco:

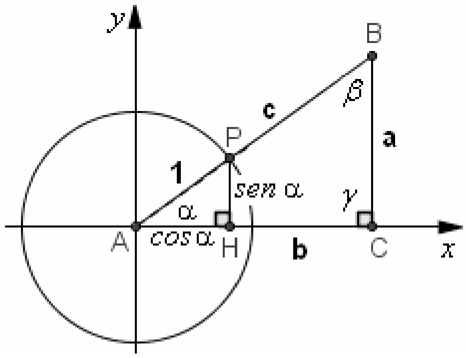
- triangolo ABC,
- lati *a, b, c* (*a* opposto al vertice A, ecc.)
- angoli α, β, γ ($\alpha = \hat{A}$ ecc.)



TEOREMA

In un triangolo rettangolo, il SENO di un angolo acuto è uguale al rapporto fra il cateto opposto e l'ipotenusa

$$\boxed{sen\ \alpha = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{ipotenusa}} = \frac{a}{c}}$$



Dimostrazione

Nel piano su cui giace il triangolo rettangolo ABC, disegniamo un riferimento cartesiano di origine A, il cui semiasse delle ascisse positive coincida con la semiretta AC.

Su questo riferimento, disegniamo poi la circonferenza goniometrica, di raggio 1.

I due triangoli rettangoli ABC, APH sono simili, quindi possiamo scrivere la proporzione

$$\text{HP} : \text{AP} = \text{CB} : \text{AB} \quad \text{da cui} \quad sen\,\alpha : 1 = a : c \quad \frac{sen\,\alpha}{1} = \frac{a}{c} \quad sen\,\alpha = \frac{a}{c},\ c.v.d$$

CONSEGUENZA IMMEDIATA: $\boxed{a = c \cdot sen\ \alpha}$ cioè $\boxed{cateto = ipotenusa \cdot seno\ dell'angolo\ opposto}$

TEOREMA

In un triangolo rettangolo, il COSENO di un angolo acuto è uguale al rapporto fra il cateto adiacente e l'ipotenusa

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\text{cateto adiacente}}{\text{ipotenusa}} = \frac{b}{c}}$$

La dimostrazione è analoga alla precedente: poiché i due triangoli rettangoli ABC, APH sono simili avremo

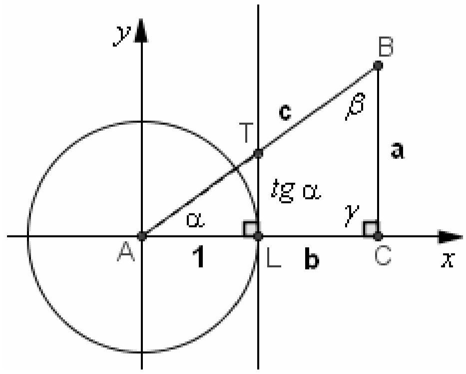
$$\text{AH} : \text{AP} = \text{AC} : \text{AB} \quad \text{da cui} \quad \cos\alpha : 1 = b : c \quad \frac{\cos\alpha}{1} = \frac{b}{c} \quad \cos\alpha = \frac{b}{c},\ c.v.d.$$

CONSEGUENZA IMMEDIATA: $\boxed{b = c \cdot \cos\ \alpha}$ cioè $\boxed{cateto = ipotenusa \cdot coseno\ dell'angolo\ adiacente}$

TEOREMA

In un triangolo rettangolo, la TANGENTE di un angolo acuto è uguale al rapporto fra il cateto opposto e il cateto adiacente

$$\boxed{tg\ \alpha = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{cateto adiacente}} = \frac{a}{b}}$$



Dimostrazione

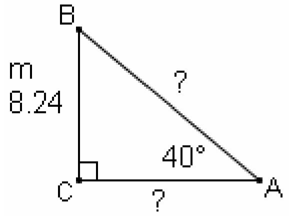
Questa volta sfruttiamo la similitudine fra ABC e ATL.

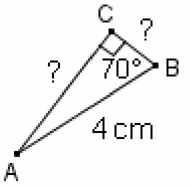
$$\text{LT} : \text{AL} = \text{CB} : \text{AC} \quad \text{quindi}$$

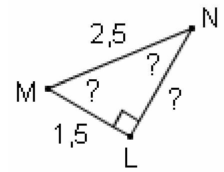
$$tg\,\alpha : 1 = a : b \qquad \frac{tg\,\alpha}{1} = \frac{a}{b} \qquad tg\,\alpha = \frac{a}{b}, \qquad c.v.d.$$

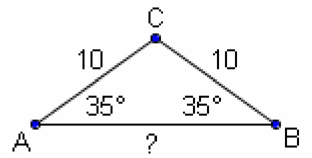
CONSEGUENZA IMMEDIATA: $\boxed{a = b \cdot tg\ \alpha}$; $\boxed{cateto = altro\ cateto \cdot tangente\ dell'angolo\ opposto\ al\ primo}$

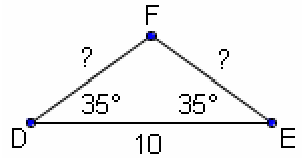
ESERCIZI

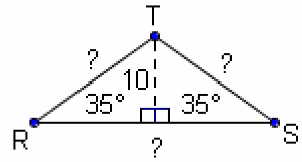
1) a) 

b) 

c) 

2) a) 

b) 

c) 

11. TEOREMI SUI TRIANGOLI QUALSIASI

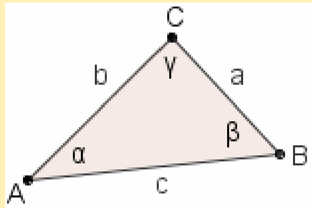
Si potrebbero dimostrare gli interessanti teoremi che seguono, validi per triangoli qualsiasi.

- Il **TEOREMA DEI SENI**: "**in un triangolo, è costante il rapporto fra ciascun lato e il seno dell'angolo opposto**"

$$\boxed{\frac{a}{\text{sen }\alpha}=\frac{b}{\text{sen }\beta}=\frac{c}{\text{sen }\gamma}}$$

- e il **TEOREMA DEL COSENO**: in ogni triangolo, valgono le relazioni scritte nel riquadro qui a destra →

$$\boxed{\begin{array}{l} a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha \\ b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma \end{array}}$$



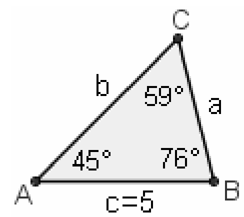
ESERCIZI

3) Mediante il Teorema dei Seni, determina gli elementi incogniti del triangolo qui a fianco raffigurato.

INDICAZIONE: Per ricavare *b*, si prenderà la formula $\frac{b}{\text{sen }\beta}=\frac{c}{\text{sen }\gamma}$

che coinvolge *b* e il lato noto *c*,

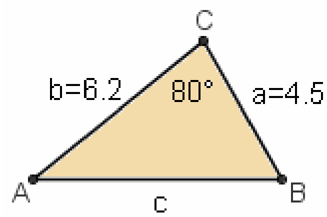
per risolverla rispetto a *b*: $b=\frac{c}{\text{sen }\gamma}\cdot\text{sen }\beta$



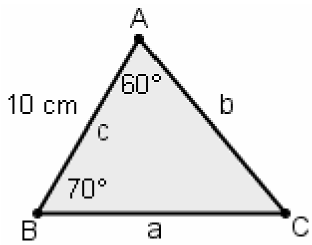
4) Serviti del Teorema del Coseno per trovare il 3° lato del triangolo in figura. Successivamente, col T. dei Seni, determina le misure dei seni degli angoli e infine risali al valore, approssimato ai gradi, degli angoli stessi.

INDICAZIONE: $c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}=\ldots$ dopodiché:

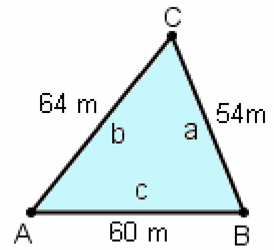
$\frac{a}{\text{sen }\alpha}=\frac{c}{\text{sen }\gamma}$; $\frac{\text{sen }\alpha}{a}=\frac{\text{sen }\gamma}{c}$; $\text{sen }\alpha=\ldots$, da cui il valore di α .



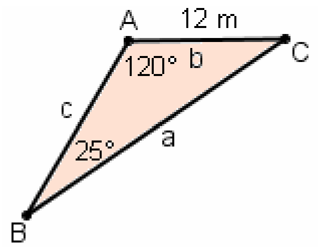
5) Applicando in modo opportuno i teoremi dei seni e del coseno, "risolvi" i triangoli in figura, ossia, a partire dai 3 elementi noti, determinane i tre elementi rimanenti.



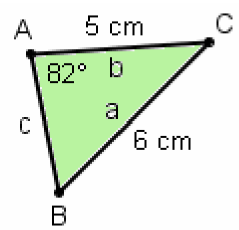
a)



b)



c)



d)

RISPOSTE

1) a) $CA\approx 9.82$ m, $AB\approx 12.82$ m b) $CA\approx 3.76$ m, $CB\approx 1.37$ m c) $LN=\sqrt{2.5^2-1.5^2}=2$; $\widehat{M}\approx 53°8'$, $\widehat{N}\approx 36°52'$
2) a) $AB\approx 16.38$ b) $DF=FE\approx 6.10$ c) $RT=TS\approx 17.43$; $RS\approx 28.56$
3) $a\approx 4.1$, $b\approx 5.7$ 4) $c\approx 7$, $\alpha\approx 39°$, $\beta\approx 61°$
5) a) 50°, ≈11.3, ≈12.3 b) ≈52°, ≈68°, ≈60° c) 35°, ≈24.6, ≈16.3 d) ≈56°, ≈42°, ≈4.1